

UNIVERSITÀ degli STUDI di CASSINO e del LAZIO MERIDIONALE
Dipartimento di Economia e Giurisprudenza

DEMOCRAZIA E DIRITTI SOCIALI

Fascicolo speciale

**PANDEMIA, NORMAZIONE DELL'EMERGENZA
E MODELLI D'INTERVENTO
SOCIO-ECONOMICI**

a cura di Giancarlo Scalese



EDIZIONI UNIVERSITÀ DI CASSINO

2020

Copyright © 2020 – Edizioni Università di Cassino
Centro Editoriale di Ateneo
Palazzo degli Studi Località Folcara, Cassino (FR), Italia
e-ISSN 2610-9166

Il contenuto del presente volume può essere utilizzato in tutto o in parte purché se ne citi la fonte e non vengano modificati il senso ed il significato dei testi in esso contenuti. L'Università degli Studi di Cassino e del Lazio meridionale non è in alcun modo responsabile dell'utilizzo che viene effettuato dei testi presenti nel volume, delle modificazioni ad essi apportate e delle conseguenze derivanti dal loro utilizzo.

I contributi sono stati sottoposti a referaggio anonimo in conformità ai criteri editoriali della rivista.



DEMOCRAZIA E DIRITTI SOCIALI

Fascicolo speciale

**PANDEMIA, NORMAZIONE DELL'EMERGENZA
E MODELLI D'INTERVENTO
SOCIO-ECONOMICI**

a cura di Giancarlo Scalese

L'IMPATTO DELLA PANDEMIA COVID-19 SULL'EFFICIENZA DEI MERCATI AZIONARI

1. Introduzione - 2. Modello e metodologia di stima - 2.1. Regolarità puntuale - 2.2. Moto Browniano multifrazionario - 2.3. Stima della regolarità puntuale di un mBm - 3. Analisi empirica - 3.1. Dati ed analisi preliminare - 3.2. Analisi dei risultati - 4. Conclusioni

1. Introduzione

Come è ampiamente noto, i modelli classici per descrivere le dinamiche finanziarie non riescono, nella maggior parte dei casi, a cogliere e modellare i complessi meccanismi che sono alla base degli improvvisi e sensibili crolli di prezzo che si verificano con una frequenza superiore rispetto a quella prevista dalla teoria standard. La debolezza dei modelli matematici tradizionali risiede, principalmente, nell'assunzione che i prezzi correnti scontino pienamente le informazioni passate, trascurando in tal modo la possibilità del verificarsi di eventi estremi, considerati semplicemente "anomalie" di mercato. Per corroborare tali evidenze, è sufficiente menzionare solo alcuni dei principali e recenti crolli che hanno pesantemente influenzato i mercati azionari a livello globale, quali ad esempio quelli conseguenti gli attacchi terroristici del 2001, la crisi dei mutui subprime del 2008 con il fallimento di numerose ed importanti istituzioni finanziarie ed, in ultimo, la crisi collegata alla pandemia da Covid-19. Ciascuno dei precedenti casi ha scosso i mercati finanziari, provocando esplosioni di volatilità che si sono propagate, con effetto domino, nei mercati azionari internazionali.

I picchi di volatilità insieme a sensibili cadute dei prezzi sono chiari sintomi del cambio repentino della struttura del mercato, nel senso che la distribuzione delle strategie di trading tra i diversi orizzonti temporali non è più in grado di bilanciare l'eccesso di posizioni corte aperte dai trader su uno o più orizzonti di investimento (Bianchi et al. (2020)). Questo meccanismo è in parte imputabile a comportamenti irrazionali che durante le crisi tendono a prevalere sul processo decisionale puramente razionale con enfasi tanto più forte quanto più le notizie acquisite dai mercati sono destabilizzanti. In queste circostanze, i mercati deviano dall'equilibrio, il che significa che il loro comportamento non può essere descritto dai modelli classici basati sull'ipotesi di semimartingalità del processo dei prezzi, perché le ipotesi che supportano la teoria dell'efficienza informativa, Fama (1970), sono temporaneamente violate. La teoria standard afferma che tali inefficienze sono istantaneamente eliminate dai mercati

finanziari attraverso arbitraggi, e l'efficienza è ripristinata non appena le nuove informazioni vengono incorporate nei prezzi. Alla luce del meccanismo appena descritto, è spontaneo chiedersi se esiste un livello di volatilità compatibile con la stabilità. In altre parole, la volatilità può essere espressa in termini di scostamento da un valore che può essere considerato "tipico" di un mercato efficiente? È chiaro che una risposta positiva a questa domanda potrebbe aiutare a valutare per quanto tempo lo shock finanziario può potenzialmente durare e quindi potrebbe fornire indicazioni utili sia agli operatori di mercato che alle istituzioni regolatrici.

Ad oggi, un'ampia letteratura si è concentrata sulla modellazione della volatilità con particolare riferimento al fenomeno della "volatility clustering", ossia la tendenza della volatilità a clusterizzarsi nel tempo. Sin dal lavoro pionieristico di Mandelbrot (1963) sono stati proposti molti modelli con l'obiettivo di modellare la volatilità della dinamica del prezzo: le distribuzioni α -stabili (Rachev e Mittnik (1993); Samorodnitsky e Taqqu (1994); Rachev e Mittnik (2000), Reussa et al. (2016)), il cui principale svantaggio è quello di essere modelli a varianza infinita; la famiglia dei processi ARCH-GARCH (Engle (1982); Bollerslev (1986); in particolare Alexander (2001) o Franco e Zakoian (2019) per una rassegna completa), i cui residui sono comunque ancora caratterizzati da code spesse nelle distribuzioni e dipendenza nella loro dinamica, chiari sintomi che la volatilità non è completamente catturata dal modello; i modelli a volatilità stocastica (Hull e White (1990), Heston (1993), Dupire (1994)), la cui idea principale è che la volatilità segua un processo diffusivo. Anche se i modelli a volatilità stocastica possono essere adatti alla modellazione di dinamiche che prevedono shock improvvisi, oppure nel descrivere distribuzioni con code spesse o, in generale, altre forme di non linearità, tali modelli rimangono difficili da stimare e prevedere.

Nonostante i diversi approcci seguiti dalle famiglie dei modelli sopra citati, il loro filo conduttore è che nessuno di essi crea un collegamento esplicito tra la volatilità e l'efficienza del mercato. Finora, tutti i modelli hanno considerato la volatilità come una misura relativa; questo significa che solo le sue variazioni vengono utilizzate per monitorare il livello di stress (cioè di allontanamento dall'efficienza) che il flusso di informazioni inietta nei mercati. Quindi, la volatilità è valutata alta o bassa solo rispetto al suo valore precedente, ma manca una chiara corrispondenza tra l'efficienza del mercato e una misura assoluta della volatilità.

Motivati da questo limite intrinseco degli attuali modelli di volatilità e dal requisito, segnalato da Engle e Patton (2001), che un modello di volatilità appropriato debba essere in grado di descrivere sia dinamiche di rientro verso la media (chiamate di *mean-reverting*) che fenomeni caratterizzati da persistenza, in questo lavoro:

a. stimiamo la regolarità puntuale di sei serie di indici azionari prima e dopo l'esplosione di volatilità riguardante il periodo del Covid-19 mediante lo stimatore $\widehat{H}(t)$. In particolare, assumiamo che la loro dinamica segua un moto Browniano multifrazionario. Il vantaggio di questo approccio è duplice: da un lato $\widehat{H}(t)$ è una misura equivalente di volatilità omogenea rispetto a diversi mercati finanziari; d'altra parte, tale misura esprime direttamente l'intensità e la direzione dell'inefficienza della serie rispetto al benchmark di efficienza rappresentato dal caso di semimartingalità;

b. analizziamo le diverse reazioni dei mercati agli shock in termini di allontanamento dall'efficienza nonché di ritorno al livello di efficienza pre-crisi;

c. analizziamo le correlazioni incrociate della serie di $H(t)$, in due intervalli di tempo: uno e due mesi prima e dopo l'esplosione di volatilità.

L'articolo è organizzato come segue: nella Sezione 2 richiamiamo la nozione di regolarità puntuale, la definizione e le principali proprietà del moto Browniano multifrazionario e il metodo che verrà utilizzato nelle applicazioni per stimare gli esponenti puntuali di regolarità degli indici borsistici; nella Sezione 3 sviluppiamo l'applicazione; mentre la Sezione 4 conclude.

2. Modello e metodologia di stima

Al fine di raggiungere gli obiettivi a. - c. prefissati nell'introduzione, dobbiamo prima introdurre brevemente alcuni concetti che verranno utilizzati nel seguito. Questi sono: la nozione di regolarità puntuale di un processo stocastico (Sezione 2.1); le proprietà principali del moto Browniano multifrazionario, che è il modello che assumeremo per la dinamica dei prezzi delle azioni (Sezione 2.2); e, infine, come stimare la regolarità puntuale di una sequenza di prezzi (Sezione 2.3).

2.1. Regolarità puntuale

Dato il processo stocastico $X(t, \omega)$ con traiettorie continue q.c. e non differenziabili su \mathbb{R} la regolarità locale di Hölder della traiettoria $t \rightarrow X(t, \omega)$ rispetto a qualche punto fissato t può essere misurata tramite l'esponente puntuale di Hölder, definito come

$$\alpha_X(t, \omega) = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|X(t+h, \omega) - X(t, \omega)|}{|h|^\alpha} = 0 \right\}. \quad (1)$$

La relazione (1) si presta alla seguente interpretazione geometrica: la funzione X ha esponente α in t_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno di t_0 , $I(t_0)$, tale che, per $t \in I(t_0)$, il grafico di X sia incluso nell'involuppo definito da $t \rightarrow X(t_0) - c|t - t_0|^{\alpha-\varepsilon}$ e $t \rightarrow X(t_0) + c|t - t_0|^{\alpha+\varepsilon}$ (si veda Lévy Véhel e Barrière (2008)).

Se $X(t, \omega)$ è un processo Gaussiano, in virtù della legge zero-uno, esiste una quantità non aleatoria $\alpha_X(t)$ tale che $\mathbb{P}(\alpha_X(t) = \alpha_X(t, \omega)) = 1$ (Ayache (2013)). Inoltre, quando $X(t, \omega)$ è un moto Browniano, $\alpha_X = \frac{1}{2}$; valori diversi da $\frac{1}{2}$ descrivono processi non markoviani, molto lisci, quando $\alpha_X \in (\frac{1}{2}, 1)$, o molto frastagliati, quando $\alpha_X \in (0, \frac{1}{2})$, e quindi tali da non soddisfare la proprietà martingala. Questo vale sia per le martingale Browniane che per quelle *well-behaved* non Browniane. Per queste ultime, il risultato deriva dall'osservazione che se Z_t è una differenza martingala rispetto a \mathcal{F}_t tale che: (a) $n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}(Z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \xrightarrow{P} v$ con v costante positiva e (b) $n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}(Z_t^2 \chi_{|Z_t| > \varepsilon \sqrt{n}} | \mathcal{F}_{t-1}) \xrightarrow{P} 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora $\sqrt{n} \bar{Z}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, v)$ (qui χ denota la funzione indicatrice e \bar{Z}_n la media di Z). Utilizzando la convergenza alla legge normale, la dimostrazione relativa al caso Browniano si applica alle martingale *well-behaved* non Browniane, vedere ad es. Revuz e Yor (1999). In particolare, si può dimostrare che la variazione quadratica del processo è zero, se $\alpha_X > \frac{1}{2}$ e infinita, se $\alpha_X < \frac{1}{2}$.

2.2. Moto Browniano multifrazionario

È noto che il moto Browniano frazionario (fBm o $B_H(t)$) (Kolmogorov (1940), Mandelbrot e Van Ness (1968)) è forse uno dei principali esempi di processo stocastico il cui esponente puntuale di Hölder è costante lungo i suoi cammini e controllato dal parametro $H \in (0, 1)$. Infatti, in ogni punto, $\alpha_{B_H}(t, \omega) = H$ quasi certamente (quando $H = \frac{1}{2}$, un fBm si riduce al moto Browniano). Il fatto che H sia costante lungo i percorsi di un fBm costituisce il maggiore inconveniente nel modellare quei fenomeni del mondo reale la cui regolarità puntuale cambia, anche bruscamente, da punto a punto (come accade, ad esempio, per le serie temporali finanziarie). Ciò ha portato a generalizzare l'fBm nel moto Browniano multifrazionario (mBm), un processo gaussiano il cui esponente di Hölder puntuale può essere calibrato in ogni punto (Pétiér e Lévy Véhel (1995); Benassi et al. (1997)). L'estensione si ottiene sostituendo il parametro costante H con una funzione di regolarità $H(t)$, soggetta ad alcune condizioni tecniche¹. Indicata con \mathbb{W} la misura Browniana reale, una rappresentazione a media mobile non anticipativa del mBm è

$$B_{H(t)}(t) = \int_{-\infty}^0 \left[(t-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} - (-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} \right] \mathbb{W}(du) + \int_0^t \left[(t-u)^{H(t)-\frac{1}{2}} \right] \mathbb{W}(du) \quad (2)$$

Come per l'fBm, anche per un mBm, la regolarità puntuale in t è uguale al valore del suo parametro funzionale in t , cioè $\alpha_{B_{H(t)}}(t, \omega) = H(t)$ quasi certamente (Ayache (2013)). Ciò significa che $H(t)$ è strettamente collegato alla deviazione standard allo stesso tempo t . La Figura 1 esplicita questa relazione: una legge esponenziale della forma $\sigma(t) = ae^{bH(t)}$ può essere stabilita tra la deviazione standard (volatilità storica) σ e la parametro funzionale del mBm, entrambi riferiti al tempo t .

Così, sotto l'ipotesi che i mercati finanziari seguano una dinamica che può essere modellata attraverso un mBm, il nostro lavoro sfrutta questa relazione per caratterizzare il comportamento di una serie temporale finanziaria. Di conseguenza, un problema centrale è

¹ $H: (0, \infty) \rightarrow (0,1)$ è una funzione Hölderiana di ordine β , cioè tale che su ogni intervallo compatto $T \subset \mathbb{R}$, per tutti $t, s \in T$, $|H(t) - H(s)| \leq c|t - s|^\beta$, con $c > 0$ e $\beta > \max_{t \in T} H(t)$.

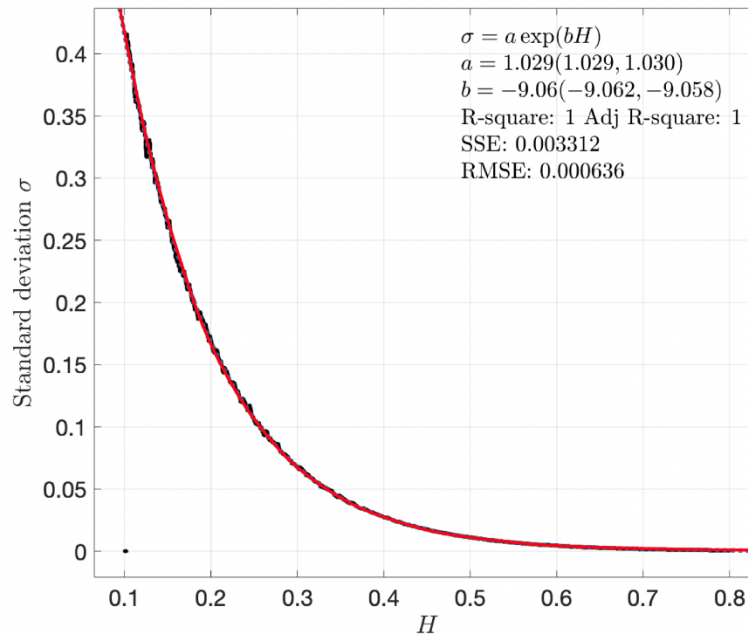


Figura 1: Relazione tra la deviazione standard stimata e l'esponente di Hölder. La deviazione standard $\sigma(t)$ è stata stimata su una finestra mobile di 30 dati lungo il percorso di un mBm con parametro funzionale $H(t)$ assegnato. I valori di $H(t)$ sono stati mediati nella stessa finestra per rendere possibile il confronto. La Figura mostra la media di 100 simulazioni di lunghezza 8.192 (punti) e la curva che li adatta meglio (linea rossa). I due grafici sono praticamente indistinguibili poiché si tratta di una corrispondenza quasi perfetta, come rivelato dai parametri di adattamento nella legenda (i valori tra parentesi sono i coefficienti della curva di adattamento ai limiti del 95%).

come stimare $H(t)$ da una serie temporale di prezzi (che assumiamo si comportino come un mBm). A tal fine, risulta utile la seguente proprietà del mBm: ad ogni istante t_0 il processo è localmente asintoticamente auto-simile² con parametro $H(t_0)$. Infatti, ponendo $Y(t_0, \varepsilon u) = B_{H(t_0+\varepsilon u)}(t_0 + \varepsilon u) - B_{H(t_0)}(t_0)$, si può dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-H(t_0)} Y(t_0, \varepsilon u) \stackrel{d}{=} B_{H(t_0)}(u) \quad (3)$$

² Ricordiamo che il processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ si dice auto-simile con parametro H se per qualsiasi $a > 0$ $\{X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t)\}$, dove l'uguaglianza vale per le distribuzioni a dimensione finita del processo (si veda, ad esempio, Embrechts e Maejima (2002)).

dove $\stackrel{d}{=}$ denota l'uguaglianza in distribuzione e $u \in \mathbb{R}$. La relazione (3) afferma che in qualsiasi punto t esiste un fBm con parametro $H(t_0)$ tangente all'mBm o, equivalentemente, in un intorno di t l'mBm si comporta come un fBm di parametro $H(t_0)$.

Poiché $B_{H(t_0)}(u) \sim \mathcal{N}(0, u^{2H(t_0)})$, l'incremento (infinitesimale) dell'mBm al tempo t_0 - normalizzato con $\varepsilon^{H(t_0)}$ - si distribuisce con media 0 e varianza $u^{2H(t_0)}$ ($u \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$). Questa proprietà può essere sfruttata per costruire uno stimatore di $H(t)$ e, quindi, di $\alpha_{B_{H(t)}}(t)$.

2.3. Stima della regolarità puntuale di un mBm

In letteratura sono stati proposti diversi metodi per stimare $H(t)$ basati su adattamenti degli stimatori asintotici disponibili per l'fBm, (vedere, ad esempio, Lux e Segnon (2018), Garcin (2017)). Generalmente coinvolgono statistiche di variazione (in particolare, variazioni del secondo ordine). Una descrizione dettagliata di questi stimatori va oltre lo scopo di questo lavoro e può essere trovata in diversi riferimenti (si veda, ad esempio, Istas e Lang (1997), Kent e Wood (1997), Benassi et al. (2000), Coeurjolly (2001), Coeurjolly (2005), Bianchi (2005), Bianchi et al. (2013), Pianese et al. (2018), Frezza (2018)). Per questo motivo, nel seguito, non entreremo nei dettagli della procedura di stima, ma utilizzeremo semplicemente lo stimatore proposto da Pianese et al. (2018). Combinando uno stimatore non distorto con grande varianza introdotto da Istas e Lang (1997) e Benassi et al. (1998) con uno stimatore a bassa varianza, ma distorto, dedotto in Bianchi et al. (2013), gli autori dello studio ottengono lo stimatore a finestra mobile non distorto e a bassa varianza $\hat{H}_{v,q,n}(t, a)$; v indica la dimensione della finestra mobile, q è il ritardo, n è la dimensione del campione e a è un filtro che agisce per rendere la sequenza localmente stazionaria e per indebolire la dipendenza tra i dati.

$\hat{H}_{v,q,n}(t, a)$ è non distorto e normalmente distribuito, e la sua varianza è nota in forma chiusa quando $H(t) = \frac{1}{2}$, cioè quando è valida la condizione di martingala. Gli estremi dell'intervallo di confidenza rispetto a $\frac{1}{2}$ possono quindi essere calcolati come segue:

$$\Phi(z) := \Phi_{\hat{H}_{v,q,n}(t,a)|H(t)=\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}} dx \quad (4)$$

dove $\sigma = \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{2k+1}{2}) - \Gamma^2(\frac{k+1}{2})}{vk^2 \log^2(n-1) \Gamma^2(\frac{k+1}{2})} \right)^{1/2}$. Pertanto, a un dato livello di confidenza α , se $H(t)$ appartiene all'intervallo $E^\alpha := \left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right]$ tale valore non devia in modo significativo da $\frac{1}{2}$. Allo stesso modo, indicato con X il processo del prezzo logaritmico, l'efficienza non può essere rifiutata a $(1 - \alpha)\%$ a condizione che $\hat{H}_{v,q,n}(t, a) \in E^\alpha$. $\hat{H}_{v,q,n}(t, a) < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ significa che il mercato sta attraversando una fase di inefficienza "negativa", mentre $\hat{H}_{v,q,n}(t, a) > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ indica che si sta verificando un'inefficienza "positiva". La Tabella 1 riassume come caratterizzare il comportamento di una serie temporale finanziaria a seconda del valore di $H(t)$.

Tabella 1: Interpretazione finanziaria di $H(t)$

$H(t)$	Effetto stocastico	Opinione investitori	Effetto sul mercato
$> \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	Persistenza Bassa varianza	Le informazioni future confermano le posizioni aperte	Bassa volatilità/Underreaction Eccesso di fiducia/Inefficienza positiva
$\in E^\alpha$	Indipendenza Martingalità	Le informazioni passate sono totalmente scontate dai prezzi	Efficienza (al livello $(1 - \alpha)\%$)
$< \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	Antipersistenza Alta varianza	Le informazioni future contraddicono le posizioni aperte	Alta volatilità/Overreaction Inefficienza negativa

3. Analisi empirica

3.1. Dati ed analisi preliminare

La metodologia illustrata nella sezione precedente può essere utilizzata per analizzare gli effetti della pandemia da Covid-19 sui mercati finanziari. Il nostro lavoro ha considerato sei indici azionari internazionali: il Dow Jones Industrial Average (DJIA) e lo Standard & Poor's 500 (S&P500) per il mercato Statunitense, l'Euro Stoxx 50 (SX5E) ed il Footsie 100 (FTSE) per il mercato Europeo ed, infine, l'Hang Seng (HSI) ed il Nikkei 225 (N225) per il mercato Asiatico. I dati processati sono quelli resi disponibili dall'"Oxford-Man Institute's realized library", versione 0.3 Gerd (2017). Preliminarmente, dopo aver calcolato le variazioni logaritmiche di ogni singolo indice, abbiamo stimato l'esponente puntuale di Hölder mediante l'algoritmo precedentemente discusso ed abbiamo notato come tale misura, per ogni singolo indice, abbia raggiunto livelli paragonabili, addirittura, a quelli registrati nella grande crisi globale del 2008-2009. In particolare, il DJIA e lo S&P500 hanno fatto registrare il 23 Marzo 2020 valori di \hat{H} pari rispettivamente a 0,296 e 0,261 mentre l'Euro Stoxx 50 ed il Footsie 100 hanno raggiunto valori soglia, rispettivamente il 13 Marzo ed il 18 Marzo, pari a 0,333 e 0,320. Queste esplosioni di volatilità nel mercato Statunitense ed Europeo testimoniano come i due siano fortemente correlati. Tutt'altro comportamento è stato riscontrato nel mercato Asiatico; in particolar modo, l'Hang Seng ed il Nikkei 225 non hanno evidenziato un crollo al ribasso dell'esponente di Hölder come quelli raggiunti dagli altri indici e si sono attestati, rispettivamente, sui valori di 0,440 e 0,368 nei giorni del 13 e 23 Marzo. Inoltre, gli indici Asiatici, dopo essere usciti dall'efficienza hanno fatto subito rientro in tale regione, evidenziando un comportamento totalmente diverso dagli altri indici per i quali si configura ancora inefficienza.

3.2. Analisi dei risultati

L'analisi evidenzia uno schema ben preciso che accomuna tutti gli indici, seppur a diversi livelli, e che descrive la dinamica prima e dopo il crollo. In particolare, il numero di giorni (D_{ex}) tra l'uscita

dall'efficienza \hat{H}_{ex} , cioè quando $\hat{H}_{v,q,n}(t, a) < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ed il raggiungimento della soglia minima dell'esponente di Hölder, (\hat{H}_{min}) è più breve rispetto a quello (D_{re}) che intercorre tra il raggiungimento del picco ed il rientro nella fase di efficienza \hat{H}_{re}^* . Questo risultato è corroborato anche dai valori, riportati nella Tabella 2, assunti dai seguenti indicatori: $CI = \frac{\hat{H}_{min} - \hat{H}_{ex}}{D_{ex}}$ e $EI = \frac{\hat{H}_{re} - \hat{H}_{min}}{D_{re}}$. Il primo fornisce la velocità con cui viene raggiunto il crollo una volta che l'indice inizia a manifestare inefficienza (fase down), ed il secondo sintetizza la velocità per tornare all'efficienza dopo il crollo (fase up).

Tabella 2: Indice del crash/Indice dell'efficienza

Index	D_{ex}	\hat{H}_{ex}	CI^\dagger	D_{re}^*	\hat{H}_{re}^*	EI^\dagger
DJIA	27	0,476	-6,7	43	0,445	3,5
FTSE	25	0,472	-6,1	46	0,420	2,2
HSI	6	0,472	-5,3	15*	0,468	1,9
N225	20	0,471	-5,1	27*	0,470	3,8
S&P500	31	0,493	-7,5	44	0,435	4,0
SX5E	20	0,465	-6,6	47*	0,426	2,0

$^\dagger \times 10^{-3}$

La Figura 2 riporta la dinamica delle stime dell'esponente di Hölder per tutti gli indici in esame, prima e dopo il crollo; il picco più basso è contrassegnato con ascissa zero. Apparentemente, sia la tempistica che l'entità dei crolli nei diversi mercati potrebbero indurre la conclusione – che sembra confermare i risultati di Capelle-Blancard e Desroziere (2020) – che la pandemia da Covid-19 ha innescato solo una crisi momentanea nei mercati finanziari internazionali, con un'apparente piccola influenza di fattori specifici per paese sulle risposte dei mercati azionari. In realtà, se si guarda alla Figura 2, questo non è esattamente il caso, poiché si possono distinguere almeno due principali diverse reazioni del mercato Statunitense/Europeo e di quello Asiatico:

- per il mercato Statunitense e quello Europeo, dopo un repentino recupero di efficienza durato circa un mese per lo più a partire dal 23 marzo e caratterizzato da dinamiche convesse della regolarità puntuale, il cambio di concavità per la maggior parte degli indici mostra un appiattimento dell'esponente di regolarità puntuale sotto la soglia inferiore di efficienza. Secondo il nostro

modello, ciò indica che la volatilità è ancora troppo elevata per essere compatibile con l'efficienza del mercato. È interessante notare che l'appiattimento è più pronunciato per gli indici europei e per il DJIA, mentre è meno evidente per lo Standard & Poor's 500. Seguendo la cronologia della crisi da Covid-19, questo comportamento può essere spiegato con l'effetto congiunto di un'immediata ripresa dei rendimenti nel primo mese dopo la flessione, seguita da una mancanza di fiducia dei mercati rispetto all'ipotesi di una rapida ripresa dell'economia mondiale. Questa interpretazione può trovare supporto nell'aumento degli annunci che hanno previsto una piena ripresa dell'economia mondiale solo nel lungo periodo. Ad esempio, il 14 aprile, il Fondo Monetario Internazionale (FMI) ha riferito che il Covid-19 avrebbe probabilmente avuto un grave impatto sull'attività economica portando ad una recessione definita del "Great Lockdown" (IMF (April 2020)). Il FMI ha previsto una contrazione del 3% dell'economia globale, ipotizzando per le economie avanzate un'entrata in recessione ed una contrazione dell'economia del 6, 1% nel 2020. Per la Cina e l'India è stata prevista una crescita, rispettivamente, dell'1,2 % e dell'1,9 %, tassi tra i più bassi degli ultimi decenni.

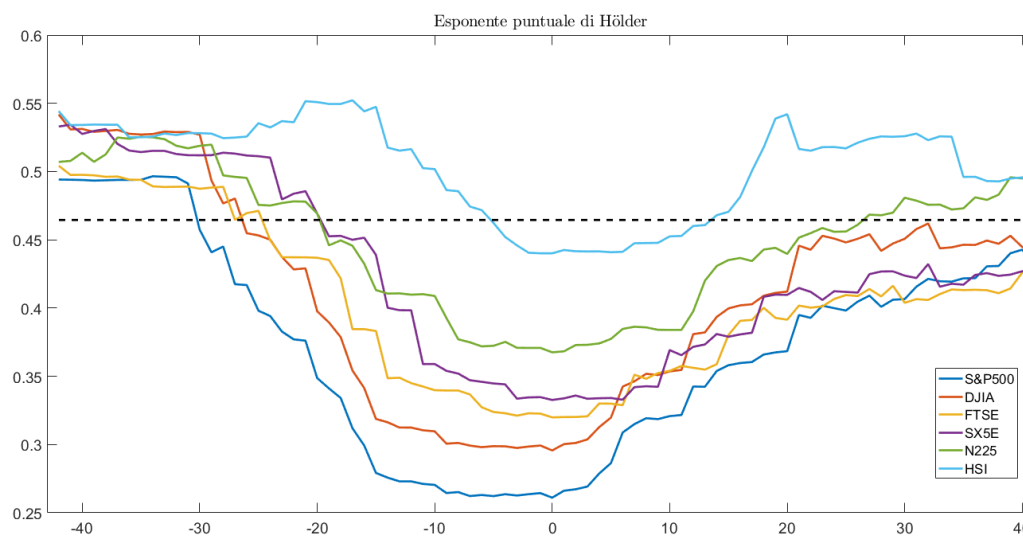


Figura 2: Dinamica della regolarità puntuale del processo dei prezzi prima e dopo il crollo nel periodo del Covid-19. Il tempo 0 è la data delle principali flessioni registrate: si noti che dopo un recupero immediato, la regolarità puntuale della maggior parte degli indici Europei e Statunitensi si è appiattita al di sotto della soglia inferiore di efficienza (linea nera tratteggiata), ciò indica il permanere di una dinamica antipersistente che caratterizza i mercati finanziari degli Stati Uniti e dell'Europa.

- Per quanto attiene al mercato Asiatico, stranamente, nonostante l'esplosione dell'epidemia da Covid-19 possa essere rintracciata in Asia, la pandemia sembra aver avuto un impatto su questi mercati solo a causa del contagio innescato dagli altri mercati. Infatti, non solo gli esponenti di regolarità puntuali riferiti agli indici Hang Seng e Nikkei 225 hanno raggiunto minimi che sono più grandi di quelli del mercato Statunitense e di quello Europeo, ma, ancora più importante, dopo lo shock, questi mercati sono tornati bruscamente sui livelli di efficienza pre-crisi, con valori di $\hat{H}(t)$ appartenenti all'intervallo di efficienza, come se l'impatto della pandemia fosse stato totalmente scontato.

È noto che durante le crisi i mercati azionari sono più correlati del solito tra di loro, si veda in tal senso il lavoro di Liu et al. (2020) e i riferimenti ivi contenuti. Il fenomeno può essere studiato anche dal punto di vista della regolarità puntuale.

Tabella 3: Matrice delle correlazioni incrociate

	1 mese prima dell'esplosione di volatilità					
	2 mesi prima dell'esplosione di volatilità					
	DJIA	FTSE	HSI	N225	S&P500	SX5E
DJIA	-	0,97	0,93	0,92	1,00	0,98
	-	0,96	-0,56	0,94	0,98	0,98
FTSE	0,98	-	0,95	0,93	0,98	1,00
	0,95	-	-0,93	0,78	0,98	0,94
HSI	0,93	0,96	-	0,98	0,96	0,95
	-0,61	-0,75	-	-0,62	-0,74	-0,63
N225	0,92	0,94	0,96	-	0,91	0,90
	0,94	0,89	-0,60	-	0,94	0,86
S&P500	1,00	0,96	0,92	0,91	-	0,98
	0,98	0,97	-0,61	0,93	-	0,97
SX5E	0,99	1,00	0,95	0,94	0,99	-
	0,96	0,89	-0,63	0,49	0,93	-

1 mese dopo dell'esplosione di volatilità

2 mesi dopo dell'esplosione di volatilità

	DJIA	FTSE	HSI	N225	S&P500	SX5E
DJIA	-	0.98	0.92	0.95	1.00	0.97
	-	0.35	-0.26	0.48	0.53	0.38
FTSE	0.98	-	0.92	0.94	0.97	0.99
	0.74	-	-0.40	0.74	0.84	0.92
HSI	0.83	0.80	-	0.74	0.84	0.92
	-0.40	-0.43	-	-0.66	-0.54	-0.28
N225	0.95	0.96	0.88	-	0.93	0.90
	0.48	0.72	-0.74	-	0.93	0.62
S&P500	1.00	0.97	0.92	0.93	-	0.97
	0.53	0.82	-0.68	0.94	-	0.63
SX5E	0.98	0.99	0.92	0.86	0.98	-
	0.82	0.91	-0.28	0.69	0.80	-

La Tabella 3 riporta le matrici di correlazione incrociata tra le sequenze degli esponenti di Hölder stimate rispettivamente un mese e due mesi (seconda riga in grassetto) prima e dopo i crolli. Si noti che tali matrici non sono simmetriche perché la correlazione dell'indice di borsa I_1 con l'indice di borsa I_2 è calcolata rispetto alla data del crash di I_1 , che ovviamente può essere diversa dalla data del crash di I_2 . Le matrici confermano lo schema già osservato dalle dinamiche individuali di $\hat{H}(t)$: prima del crollo le correlazioni tra gli esponenti puntuali stimati sono generalmente superiori a quelle osservate dopo il crollo, sia ad un mese che a due mesi. Tuttavia, alcune differenze meritano di essere notate: le correlazioni a un mese dal crollo continuano ad essere decisamente alte, mentre diminuiscono drasticamente (fino a valori negativi per l'HSI) nell'orizzonte di due mesi. Questo è attribuibile ai diversi comportamenti, discussi in precedenza, in relazione al cambiamento di concavità nella curva di regolarità puntuale che si verifica circa un mese dopo il crollo.

4. Conclusioni

In questo articolo abbiamo analizzato gli effetti della pandemia da Covid-19 sull'efficienza del mercato azionario utilizzando l'esponente di regolarità puntuale come misura della volatilità. Sotto l'ipotesi parsimoniosa che la dinamica di sei indici azionari internazionali, rappresentativi dei principali

mercati mondiali, possa essere modellata con un moto Browniano multifrazionario, l'esponente di regolarità al tempo t esprime direttamente il grado di efficienza del mercato allo stesso tempo t . I risultati suggeriscono che a seguito della pandemia solo i mercati Asiatici hanno recuperato la piena efficienza, mentre il mercato Europeo e quello Statunitense - dopo un primo rimbalzo - non sono ancora tornati al livello di efficienza pre-crisi. Inoltre, l'inefficienza che caratterizza tali mercati è di tipo negativo, ovvero origina livelli di volatilità moderatamente elevati. La risposta allo shock innescato dalla pandemia da Covid-19 è sostanzialmente diversa da quella osservata nell'ultima crisi finanziaria globale del 2007-2009. Ciò può essere imputato alla diversa natura degli interventi intrapresi dalle istituzioni politiche oltre che finanziarie e dal fatto che nella crisi innescata dal Covid-19 predomina ancora una forte incertezza sulle prospettive future.

MASSIMILIANO FREZZA
Università degli Studi di Cassino
e del Lazio Meridionale

SERGIO BIANCHI
Sapienza Università di Roma
Tandon School of Engineering, New York University

AUGUSTO PIANESE
Università degli Studi di Cassino
e del Lazio Meridionale

Bibliografia

- C. ALEXANDER, *Market models, a guide to financial data analysis*, Chichester, 2001.
- A. AYACHE, *Continuous Gaussian Multifractional Processes with Random Pointwise Hölder Regularity*, in *Journal of Theoretical Probability*, 2013, n. 26, pp. 72-93.
- A. BENASSI, A.S. JAFFARD, D. ROUX, *Elliptic Gaussian non-random processes*, in *Revista Mathematica Iberoamericana*, 1997, n. 13, pp. 19-89.
- A. BENASSI, S. COHEN, J. ISTAS, *Identifying the multifractional function of a gaussian process*, in *Statistics and Probability Letters*, 1998, n. 39, pp. 337-345.

- A. BENASSI, P. BERTRAND, S. COHEN, J. ISTAS, *Identification of the Hurst Index of a Step Fractional Brownian Motion*, in *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2000, 3, 1-2, pp. 101-111.
- S. BIANCHI, *Pathwise Identification of the Memory Function of the Multifractional Brownian Motion with Application to Finance*, in *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2005, n. 8, pp. 255-281.
- S. BIANCHI, A. PANTANELLA, A. PIANESE, *Modeling stock prices by multifractional Brownian motion: an improved estimation of the pointwise regularity*, in *Quantitative Finance*, 2013, n. 13, pp. 1317-1330.
- S. BIANCHI, M. FREZZA, *Fractal stock markets: International evidence of dynamical (in)efficiency*, in *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, n. 27, pp. 71-102.
- S. BIANCHI, A. PIANESE, M. FREZZA, *A distribution-based method to gauge market liquidity through scale invariance between investment horizons*, in *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2020, pp. 1-16.
- T. BOLLERSLEV, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, in *Journal of Econometrics*, 1986, n. 31, pp. 307-327.
- G. CAPELLE-BLANCARD, A. DESROZIERS, *The stock market is not the economy? Insights from the Covid-19 crisis*, in *Covid Economics: Vetted and Real-Time Papers*, CEPR, 2020.
- Z. CHEN, R.T. DAIGLER, *Persistence of volatility in futures markets*, in *Future Markets*, 2006, n. 26, pp. 571-594.
- J.F. COEURJOLLY, *Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its Sample Paths*, in *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2001, 4, 2, pp. 199-227.
- J.F. COEURJOLLY, *Identification of multifractional Brownian motion*, in *Bernoulli*, 2005, 11, 6, pp. 987-1008.
- B. DUPIRE, *Pricing with a smile*, in *Risk*, 1994, n. 7, pp. 18-20.
- P. EMBRECHTS, M. MAEJIMA, *Selfsimilar Processes*, in *Princeton Series in Applied Mathematics*, Princeton University Press, 2002.
- R.F. ENGLE, *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, in *Econometrica*, 1982, n. 50, pp. 987-1007.

R.F. ENGLE, A.J. PATTON, *What good is a volatility model?*, in *Quantitative Finance*, 2001, n. 1, pp. 237-245.

F. FAMA, *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, in *Journal of Finance*, 1970, n. 25, pp. 383-417.

J.P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, K.R. SIRCAR, *Mean-reverting stochastic volatility*, in *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2000, n. 3, pp. 101-142.

J.P. FOUQUE, M.J. LORIG, *A Fast Mean-Reverting Correction to Heston's Stochastic Volatility Model*, in *SIAM Journal of Financial Mathematics*, 2011, n. 2, pp. 221-254.

C. FRANCO, J.M. ZAKOIAN, *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 2nd Edition, New Jersey, 2019.

M. FREZZA, *A fractal-based approach for modeling stock price variations*, in *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, n. 28, pp. 91-102.

M. GARCIN, *Estimation of time-dependent hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates*, in *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, n. 483 Supplement C, pp. 462-479.

H. GERD, A. LUNDE, N. SHEPHARD, K. SHEPPARD, *Oxford-Man Institute's realized library*, University of Oxford, 2009.

INTERNATIONAL MONETARY FUND (IMF), *World Economic Outlook*, April 2020.

J.T. KENT, A.T.A. WOOD, *Estimating the fractal dimension of a locally selfsimilar Gaussian process using increments*, in *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 1997, n. 59, 3, pp. 679-700.

A.N. KOLMOGOROV, *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum*, in *C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR (NS)*, 1940, n. 26, pp. 115-118.

S.L. HESTON, *A closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options*, in *Review of Financial Study*, 1993, n. 6, pp. 327-343.

J. HULL, A. WHITE, *Pricing interest-rate derivative securities*, in *Review of Financial Study*, 1990, n. 3, pp. 573-592.

J. ISTAS, G. LANG, *Variations quadratiques et estimation de l'exposant de Hölder local d'un processus gaussien*, in *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1997, n. 33, pp. 407-436.

- J. LÉVY VÉHEL, O. BARRIÈRE, *Local Hölder regularity-based modeling of RR intervals*, in *Proceedings 21th IEEE International Symposium on Computer-Based Medical Systems*, 2008, pp. 75-80.
- H.Y. LIU, A. MANZOOR, C.Y. WANG, L. ZHANG, Z. MANZOOR, *The Covid-19 Outbreak and Affected Countries Stock Markets Response*, in *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2020, n. 17, pp. 2800 ss.
- T. LUX, M. SEGNON, *Multifractal Models in Finance: Their Origin, Properties and Applications*, in *The Oxford Handbook of Computational Economics and Finance*, Oxford, 2018.
- B. MALKIEL, R. SHILLER, *Does Covid-19 Prove the Stock Market Is Inefficient?*, in *Pairagraph*, 4 May 2020.
- B. MANDELBROT, *The variation of certain speculative prices*, in *Journal of Business*, 1963, n. 36, pp. 392-417.
- B. MANDELBROT, J.W. VAN NESS, *Fractional Brownian motion, fractional noise and application*, in *SIAM Review*, 1968, n. 10, pp. 422-437.
- D. NELSON, *Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach*, in *Econometrica*, 1991, n. 59, pp. 349-370.
- A.J. PATTON, K. SHEPPARD, *Good Volatility, Bad Volatility: Signed Jumps and The Persistence of Volatility*, in *Review of Economics and Statistics*, 2015, n. 97, pp. 683-697.
- R.S. PÉLTIER, J. LÉVY VÉHEL, *Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*, in *Research Report RR-2645 INRIA*, 1995, pp. 1-39.
- A. PIANESE, S. BIANCHI, A.M. PALAZZO, *Fast and unbiased estimator of the time-dependent Hurst exponent*, in *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, n. 28, pp. 31-102.
- S.T. RACHEV, S. MITTNIK, *Modeling asset returns with alternative stable distribution*, in *Econometric Review*, 1993, n. 12, pp. 261-330.
- S.T. RACHEV, S. MITTNIK, *Stable Paretian Models in Finance*, New York, 2000.
- A. REUSSA, P. OLIVARES, S. SECOC, R. ZAGSTA, *Risk Management and Portfolio Selection Using α -Stable Regime Switching Models* in *Applied Mathematical Sciences*, 2016, n. 10, 12, pp. 549-582.
- D. REVUZ, M. YOR, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Heidelberg, 3rd Edition, 1999.
- G. SAMORODNITSKY, M.S. TAQQU, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, New York, 1994.