



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI  
CASSINO E DEL LAZIO MERIDIONALE

Corso di Dottorato in  
METODI, MODELLI E TECNOLOGIE  
PER L'INGEGNERIA

Curriculum Ingegneria Civile

Ciclo XXXIV

APPLICAZIONI DI METODI  
COMPUTAZIONALI IN GEODESIA

SSD: ICAR/06

Coordinatore del Corso  
Chiar.mo Prof. Fabrizio Marignetti

Dottorando  
Valerio Manzari

Supervisore  
Chiar.ma Prof.ssa Maria Grazia D'Urso

Supervisore  
Chiar.ma Prof.ssa Wilma Polini

*“I have not been able to discover  
the cause of those properties  
of gravity from phenomena,  
and I frame no hypotheses”*

*Isaac Newton*

*Letter to Robert Hooke  
(15 February 1676)*

## **RINGRAZIAMENTI**

Porgo un doveroso e particolare ringraziamento alla Professoressa Maria Grazia D'Urso che con disponibilità e altissima professionalità mi ha guidato e accompagnato in questo triennio di studio e ricerca, offrendomi le proprie preziose conoscenze e competenze scientifiche.

Ringrazio la Professoressa Wilma Polini e il Professore Fabrizio Marignetti per la loro costante presenza, per i consigli e per la loro preziosa disponibilità.

Doverosi ringraziamenti vanno al Professore Luciano Rosati per avermi accolto nella Scuola di Dottorato della propria Università e per avermi fatto partecipe delle conoscenze scientifiche che sono state il fondamento degli argomenti della tesi.

Ringrazio Maria, Francesca, Joanny e la mia Famiglia che mi hanno sostenuto in ogni momento.

Esprimo gratitudine a Domenico e a quanti, nel corso di questo lungo periodo, mi hanno fornito consigli utili.

# ABSTRACT

Computing the gravitational effects due to given mass distributions is a fundamental problem in the applications of geophysics and geodesy.

Potential Theory can only be partially used in geophysics: in gravity, magnetism, methods of calculating electromagnetic, electrical heat flux, and computing the flux of fluids. Therefore, Potential Theory, with the use of complex mathematical tools, constitutes the basis for the solution of various geophysical problems, managing in fact to be almost indispensable to better understand some geophysical data.

Potential theory addresses the mathematics of equilibrium and, in particular, the study of harmonic functions, given their fundamental role in equilibrium problems in a homogeneous medium.

The advent of Inverse Theory has revolutionized the whole procedure for interpreting geophysical data. This was made possible thanks to the very rapid development of computer science, technology that has improved the computing software and the numerous methods used in mathematical modelling.

In the thesis work I will present new expressions for the gravitational potential that involve alternative and less expensive computational capabilities than those reported in the specialized literature.

I will show that the singularities that can influence the computation of the effects of gravity (potential, gravity and tensor gradient fields) can be systematically addressed by invoking the theory of distribution with suitable differential calculus formulas.

The general approach will be led with reference to the case of models of polyhedral bodies, regular or not, having either a constant or a depth–relative mass density.

The validated analytical formulas have been fully confirmed by applications with Matlab® programs, coded and carefully tested by calculating the effects of gravity induced by attractive bodies positioned in arbitrary observation points. The formulas illustrated in the thesis have been numerically checked with the alternative ones derived on the basis of different approaches, already established in scientific literature, intensively and repeatedly testing the effects of gravity induced by real attractive bodies with arbitrarily assigned density variations.

The efficiency of the proposed formulas lies in the ability to correctly evaluate the singularities that arise in cases where the attracted points occupy different positions of the attractive mass.

The research activity was further implemented with the introduction of analytical formulations based on the approximation of the ground masses with shapes of vertical prisms considered as prisms with polynomial density.

The gravitational anomaly associated with a polyhedral body of arbitrary geometric shape and with different values of polynomial density in both horizontal and vertical directions is analytically evaluated. The gravity anomaly is evaluated at an arbitrary point that does not necessarily coincide with the origin of the reference system in which the assigned density function is located.

It has been established that the density contrast is comparable to exponential polynomial functions of higher order than the third. By invoking the recent results of Potential Theory, the solutions have proved to be devoid of singularities and are expressed as the sums of algebraic quantities that depend only on the vertices of the polyhedron and on the density function of the polynomial. The accuracy, robustness and effectiveness of the approach can be demonstrated with numerical calculations on the basis of examples derived from the existing literature.

# TABLE OF CONTENTS

ABSTRACT.....	I
TABLE OF CONTENTS.....	III
List of Figures.....	V
List of Tables .....	VIII
INTRODUZIONE .....	1
1.    Capitolo 1 – Applicazioni dei metodi gravimetrici e magnetici.....	8
1.1    Introduzione.....	8
1.2    Panoramica generale delle applicazioni .....	8
1.2.1    Studi in prossimità della superficie .....	10
1.2.2    Applicazioni alle risorse energetiche .....	11
1.2.3    L’ esplorazione di risorse minerarie.....	15
1.2.4    Indagini litosferiche .....	18
2.    Capitolo 2 - La Teoria del Potenziale Gravitazionale.....	21
2.1    Introduzione.....	21
2.1.1    Campi potenziali .....	21
2.1.2    Punti, confini e regioni.....	23
2.1.3    Teorema di Green.....	24
2.1.4    Gli effetti della gravità su una massa puntuale .....	29
2.1.5    Gli effetti della gravità su un corpo esteso.....	31
3.    Capitolo 3 – Metodi a confronto.....	33
3.1    Introduzione.....	33
3.2    Modelli di gravità .....	34
3.3    Esempi tridimensionali – I prismi rettangolari.....	36
3.4    Esempi bidimensionali .....	40
3.5    Gravity and Steady - State Ocean Circulation Explorer GOCE - Il satellite GOCE	44
4.    Capitolo 4 - Gli effetti gravitazionali dovuti a determinate distribuzioni di masse: il problema della modellazione ideale di un corpo .....	50
4.1    La modellazione delle sorgenti di gravità idealizzate .....	50

4.2	Nuove espressioni del Potenziale Gravitazionale e delle sue derivate per sorgenti di forma prismatica.....	51
4.3	Nuove espressioni del Potenziale Gravitazionale per sorgenti di forma poliedrica.....	52
4.4	Gli effetti gravitazionali di corpi poliedrici con densità variabile linearmente.....	53
4.4.1	Il potenziale gravitazionale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente.....	54
4.4.2	Derivate del primo ordine del potenziale gravitazionale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente.....	56
4.4.3	Derivate del secondo ordine del potenziale gravitazionale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente.....	56
5.	Capitolo 5 - Le anomalie gravitazionali.....	57
5.1	Anomalia gravitazionale di un corpo 2D.....	57
5.1.1	L'anomalia gravitazionale di un corpo 2D all'origine $O$ del piano di riferimento	60
5.1.2	Espressioni analitica e algebrica dell'anomalia di gravità in $O$ in termini di integrali al contorno.....	63
5.1.3	L'anomalia gravitazionale di un corpo 2D in un punto arbitrario $P$	63
5.2	L'anomalia gravitazionale di corpi poliedrici con variazione di densità polinomiale.....	65
5.2.1	Anomalia di gravità dei corpi poliedrici all'origine $O$ del sistema di riferimento	67
5.2.2	Espressione analitica dell'anomalia gravitazionale in $O$ in termini di integrali 2D.....	70
5.2.3	Espressione analitica dell'anomalia di gravità in $O$ in termini di integrali di ciascuna faccia del poliedro.....	71
5.3	Espressione analitica di integrali di faccia in termini di integrali 1D.....	73
5.4	Anomalia di gravità di corpi poliedrici in un punto arbitrario $P$ .....	73
6.	Capitolo 6 – Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale.....	76
6.1	Potenziale nell'origine $O$ del sistema di riferimento.....	77
6.1.1	Espressione analitica degli Integrali 3D in integrali 2D.....	80
6.1.2	Espressione analitica degli Integrali 2D in integrali 1D.....	88
6.1.3	Espressioni esplicite degli integrali 1D.....	94
6.2	Potenziale in un punto arbitrario $P$ .....	96

7.	Capitolo 7 – Esempi numerici .....	98
7.1	Soluzioni numeriche per il calcolo del potenziale gravitazionale e delle sue derivate per sorgenti di forma poliedrica.....	98
7.2	Soluzioni analitiche e numeriche per il calcolo dell’anomalia di gravità di un corpo 2D.....	103
7.2.1	Soluzioni analitiche e numeriche per il calcolo dell’anomalia di gravità per corpi poliedrici con contrasto di densità polinomiale .....	114
8.	Capitolo 8 – Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM.....	128
8.1	Valutazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM a densità costante.....	128
8.2	Valutazione del potenziale gravitazionale e rappresentazioni grafiche per DTM a densità polinomiale .....	135
	CONCLUSIONI .....	150
	References.....	155

## LIST OF FIGURES

Figura 1-	Regione R soggetta alla forza di campo F.....	25
Figura 2 -	Condizioni per la terza identità di Green .....	27
Figura 3 -	Distribuzione spaziale dei punti $P_1$ e $P_2$ alla distanza $r_1$ e $r_2$ da una massa $m$ , utilizzati nel calcolo dei potenziali $U_1$ e $U_2$ .....	30
Figura 4 -	Tre categorie di tecniche per interpretare i dati del campo potenziale. L’anomalia misurata è rappresentata da $A$ , l’anomalia calcolata da $A_0$ , e l’anomalia misurata e trasformata da $A'$ . I parametri $p_1, p_2, \dots$ sono attributi delle sorgenti, come per esempio la profondità, lo spessore, la densità, oppure la magnetizzazione.....	33
Figura 5 -	Un corpo tridimensionale con densità $\rho(x', y', z')$ e una forma arbitraria osservata dal punto $P(x, y, z)$ . Vettore unitario dei punti $\mathbf{r}$ da un elemento della massa al punto $P$ .....	35
Figura 6 -	Approssimazione di una massa tridimensionale secondo una sequenza di prismi rettangolari .....	37
Figura 7 -	Approssimazione di un corpo tridimensionale attraverso una sequenza di lamine, ciascuna approssimata ad un poligono bidimensionale .....	38



Figura 8 - Mappatura mostrante esempi di anomalie dovute a sorgenti bi e tridimensionali. I contorni rappresentano il campo totale di anomalia di un'area del centro – nord Nevada. A: anomalia bidimensionale; B: anomalia tridimensionale ..	41
Figura 9 - Approssimazione di un corpo bidimensionale con un poligono formato da N lati.....	42
Figura 10 - a) Immagine illustrante la variazione dell'orbita del satellite (fonte ESA); b) controllo dei pannelli solari prima del lancio (fonte ESA); c) schema con le ondulazioni del satellite dovute a tre masse perturbanti .....	45
Figura 11 - Gradiometro a bordo di GOCE (fonte ESA).....	46
Figura 12 - Parametri essenziali degli elementi del sistema GOCE .....	48
Figura 13 - Immagine schematica del funzionamento di GOCE .....	49
Figura 14 - Quadro di riferimento bidimensionale di un corpo poliedrico .....	53
Figura 15 - Dominio poligonale ed entità geometriche del bordo iesimo .....	62
Figura 16 - Rappresentazione della simbologia usata per assegnare la densità di contrasto $\sigma$ e definire la posizione di $\Omega$ rispetto ad un punto arbitrario P.....	64
Figura 17 - Dominio del poliedro $\Omega$ e decomposizione del vettore posizione di un punto sulla faccia .....	72
Figura 18 - Rappresentazione delle entità geometriche utilizzate per assegnare il contrasto di densità ( $s$ ) e definire la posizione di $\Omega$ rispetto ad un punto arbitrario P74	
Figura 19 - Variazione del potenziale U quando il punto di osservazione si sposta simmetricamente lungo x rispetto a $P_a$ .....	102
Figura 20 - Dominio rettangolare da Rao (1986).....	104
Figura 21 - Comparazione tra i risultati ottenuti con l'approccio presentato in D'Urso e quelli di Zhang et al. per il dominio di cui alla figura 22 .....	104
Figura 22 - Dominio tratto da Garcia – Abdeslem et al.....	106
Figura 23 - Raffronto tra l'approccio di D'Urso e quello di Zhou.....	106
Figura 24 - Dominio da Murthy e Rao (1979).....	108
Figura 25 - Confronto fra i risultati di Zhang et al. (2001), Zhou (2008) e la citata procedura di D'Urso .....	108
Figura 26 - Dominio tratto da Martin - Atienza e Garcia - Abdeslem.....	110
Figura 27 - Confronto tra i risultati dell'approccio di D'Urso e quelli di Zhou (2010) .....	110
Figura 28 - Dominio derivato da Martin - Atienza e Garcia - Abdeslem (1999)	112
Figura 29 - Confronto tra i risultati ottenuti con l'approccio di D'Urso e quelli di Zhou (2010) .....	112

Figura 30 - Valori di gravità per il termine costante contenuto nella formula (7.6)	115
Figura 31 - Valori di gravità per il termine lineare della formula (7.6)	116
Figura 32 - Valori di gravità per il termine quadratico contenuto in (7.6)	116
Figura 33 - Valori di gravità riferiti al termine cubico contenuto nella formula (7.6)	117
Figura 34 - Differenze tra valori analitici e numerici per il termine costante	117
Figura 35 - Differenza tra i valori analitici e numerici per il termine lineare	118
Figura 36 - Differenze tra i valori analitici e numerici per il termine quadratico	118
Figura 37 - Differenze tra valori analitici e numerici per il termine al cubo del contrasto di densità	119
Figura 38 - Gravità a $y = 10$ km	119
Figura 39 - Gravità a $y = 11$ km	120
Figura 40 - Gravità a $y = 12,5$ km	120
Figura 41 - Gravità a $y = 15$ km	121
Figura 42 - Differenze $\Delta$ tra valori analitici e numerici per $y = 10$ km, si veda la figura 38	122
Figura 43 - Differenze $\Delta$ tra valori analitici e numerici per $y = 11$ km, si veda la figura 39	122
Figura 44 - Differenze $\Delta$ tra valori analitici e numerici per $y = 12,5$ km, si veda la figura 40	123
Figura 45 - Differenze $\Delta$ tra valori analitici e numerici per $y = 15$ km, si veda la figura 41	123
Figura 46 - Anomalia di gravità a $z = 0$ con densità di cui alla formula (7.6)	124
Figura 47 - Anomalia di gravità a $z = 0$ con densità di cui alla formula (7.7)	125
Figura 48 - Distribuzione dell'anomalia di gravità con densità di cui alla formula (7.8)	126
Figura 49 - Distribuzione dell'anomalia di gravità con densità di cui alla formula (7.9)	126
Figura 50 - Punto attratto $P$ e massa attraente $\Omega$	129
Figura 51 - Punti singolari	129
Figura 52 - DTM Cassino Sud	130
Figura 53 - Tipologia di modellazione	130
Figura 54 - Posizione dei punti attratti sul DTM di Cassino Sud	132
Figura 55 - DTM Cassino sud	135

Figura 56: generico poliedro e relative facce.....	136
Figura 57 - Porzione DTM 2 Km x 2 Km estrapolata da DTM 10 Km x 10 Km	137
Figura 58 - Caratterizzazione: passo nodi, punti di osservazione e tipologia poliedri .....	138
Figura 59 - Porzione DTM 2 Km x 2 Km e griglia dei punti di osservazione....	138
Figura 60 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità costante .....	139
Figura 61 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile linearmente .....	140
Figura 62 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile con legge quadratica.....	140
Figura 63 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile con legge cubica.....	141
Figura 64 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile con polinomio di quarto grado.....	141
Figura 65 - Rappresentazione grafica della derivata prima densità costante .....	142
Figura 66 - Rappresentazione grafica della derivata prima densità variabile linearmente.....	142

## LIST OF TABLES

Tabella 1 - Valori del potenziale e del secondo ordine di derivate per l'asteroide 433 EROS .....	99
Tabella 2 - Confronto tra i risultati di Tsoulis e D'Urso (present).....	101
Tabella 3 - Valori numerici dell'anomalia di gravità di cui alle figure 22 e 23..	105
Tabella 4 - Valori numerici dell'anomalia di gravità di cui alle figure 24 e 25..	107
Tabella 5 - Valori numerici dell'anomalia di gravità comparati a quelli di Zhou (2008) e Zhang (2010) .....	109
Tabella 6 - Valori numerici dell'anomalia di gravità in D'Urso e in Zhou (2010) .....	111
Tabella 7 - Valori numerici dell'anomalia di gravità riferiti all'approccio di D'Urso e a quello di Zhou. ....	113

Tabella 8 - Anomalie gravitazionali (mGal) associate ad un prisma $\Omega$ [(10,20] x [10,20] x [0,8] (dimensioni in chilometri e densità) in diverse posizioni; confronto fra valori analitici a) e numerici b). Tempo di calcolo misurato in secondi .....	121
Tabella 9 - Coordinate dei n. 20 punti attratti .....	131
Tabella 10 - Valori del Potenziale per densità costante e differenza tra modellazione prismatica e poliedrica .....	133
Tabella 11 - Valori della derivata prima del Potenziale per densità costante e differenza tra modellazione prismatica e poliedrica .....	134
Tabella 12 - Valori del Potenziale per densità costante .....	143
Tabella 13 - Valori del Potenziale per densità variabile linearmente .....	144
Tabella 14 - Valori del Potenziale per densità pol. secondo grado .....	145
Tabella 15 - Valori del Potenziale per densità pol. terzo grado .....	146
Tabella 16 - Valori del Potenziale per densità pol. quarto grado .....	147
Tabella 17 - Valori della 3 <sup>a</sup> comp. della derivata con densità costante [m/s <sup>2</sup> ]....	148
Tabella 18 - Valori della 3 <sup>a</sup> comp. della derivata con densità variabile linearmente [ m/s <sup>2</sup> ].....	149

# INTRODUZIONE

La geofisica studia proprietà e condizioni fisiche della Terra con l'obiettivo di descriverne i fenomeni fisici in modo approfondito e, da un punto di vista generale, di interpretarne le relative cause.

I metodi geofisici hanno avuto un ruolo fondamentale nel determinare la natura della Terra, contribuendo al nostro stato attuale di conoscenza dell'origine e dell'evoluzione del nostro pianeta e di tutti i processi coinvolti nel cosiddetto sistema Terra. Inoltre, hanno contribuito a migliorare la qualità della vita dell'umanità intera studiando potenziali pericoli naturali e la localizzazione di risorse sfruttabili.

I metodi gravimetrici e magnetici sono tra le più importanti tecniche geofisiche per lo studio della parte invisibile del pianeta Terra. Inizialmente, i metodi gravimetrici e magnetici furono finalizzati quasi interamente alla risoluzione di problemi su scala globale. Successivamente, per quasi tutto il secolo scorso, sono stati anche utilizzati per la ricerca e le indagini di risorse naturali e per lo studio di potenziali pericoli naturali. Questa finalità è stata in gran parte guidata da bisogni umani e dallo sviluppo di tecnologie migliori, a cominciare dalla ricerca degli idrocarburi conseguente al marcato aumento della domanda di petrolio e di gas a partire dagli anni '20.

I metodi della gravità e magnetici hanno numerose e interessanti peculiarità e caratteristiche anche qualitative. Sono generalmente meno costosi di altri metodi geofisici e possono essere osservati ad una densità e precisione soddisfacenti per applicazioni in un intervallo di interesse che va dalle perforazioni terrestri a quelle marine, a quelle aviotrasportate e a quelle su piattaforme satellitari.

Tuttavia, le loro misurazioni raramente danno una risposta completa a un problema esplorativo o geologico. La risoluzione spaziale di entrambi i metodi, in particolare il metodo della gravità, è limitata e raramente questi metodi forniscono soluzioni inequivocabili. Di conseguenza un segno distintivo del successo dell'applicazione del metodo della gravità e dei metodi magnetici è la loro sinergia nell'essere utilizzati in combinazione con dati geofisici ausiliari e con le informazioni geologiche collaterali per ridurre la loro ambiguità (Saltus e Blakely, 2011).

## INTRODUZIONE

Un altro importante attributo che amplia la loro applicazione è la disponibilità alla loro commercializzazione e alla disponibilità ad essere utilizzati da una vasta platea di utenti.

Sebbene la densità e, in molti casi, la qualità di dati siano insufficienti per gli studi localizzati e specialistici, risultano tuttavia utili in molte indagini regionali o servono come sfondo per studi più localizzati.

Le applicazioni dei metodi di gravità e dei metodi magnetici sono divise in quattro categorie principali: studi prossimi alla superficie terrestre, applicazioni relative a ricerche di risorse energetiche, esplorazione delle risorse minerali e indagini litosferiche.

Gli studi effettuati in prossimità della superficie riguardano l'applicazione dei metodi di gravità e magnetici alle indagini relative alla Terra per l'ingegneria, per l'ambiente e per l'archeologia. Le problematiche connesse riguardano la risoluzione di problemi che sono in gran parte concentrati sulla superficie della Terra.

Le applicazioni relative alle esplorazioni delle risorse energetiche sono concentrate sullo sfruttamento di idrocarburi, ma includono anche esempi dell'uso dei metodi della gravità e del magnetismo nelle indagini sulla ricerca del carbone e delle risorse geotermiche.

L'esplorazione delle risorse minerali comprende studi indiretti e diretti in gran parte per individuare giacimenti metallici, sebbene vengano annoverati esempi sull'uso dei metodi nella ricerca di diamanti e dell'uranio.

Infine, le applicazioni alle indagini sulla litosferica riguardano l'ampio uso degli studi della gravità e del magnetismo sulla crosta continentale, su quella oceanica e sul mantello superiore che costituiscono la litosfera della Terra.

Generalmente questi studi di natura accademica aiutano a fornire una comprensione della natura della Terra e su come operano i processi della Terra.

È facile intuire che nuove e migliori applicazioni sull'uso dei metodi di gravità e magnetici si ottengono grazie ad una più facile accessibilità ai dati e alla loro alta qualità.

Ad esempio, l'aumento della precisione nelle osservazioni della gravità ha portato a nuove applicazioni legate alle variazioni temporali nei movimenti di fluidi e gas nel sottosuolo. Sono migliorate le misurazioni e l'elaborazione magnetiche dando nuova vita allo studio delle anomalie di bassa ampiezza associate ai riempimenti di bacini sedimentari. Una delle caratteristiche più notevoli della casistica è quella che esse mostrano l'ampiezza della scala delle applicazioni dei metodi gravitazionali e magnetici. Lunghezze d'onda di impiego nello studio della gamma terrestre vanno dal

## INTRODUZIONE

metro fino ad anomalie misurate in migliaia di chilometri, il tutto associato a fonti estese e profonde. Allo stesso modo, ampiezze di anomalie di notevole interesse oggi coprono diversi ordini di grandezza.

I modelli teorici che si utilizzano per interpretare alcune proprietà o fenomeni della Terra non sono sempre desumibili da un'osservazione diretta, pertanto, una delle caratteristiche della geofisica è quella di dover attribuire i giusti valori a determinate entità, come ad esempio la densità dell'interno della Terra, per la quale si deve ricorrere a dati indiretti, perché è impossibile arrivare materialmente oltre una certa profondità.

Un modello sarà tanto più realistico quanto più numerose saranno le entità con esso spiegabili: in genere si ipotizzano dei modelli nei quali si attribuiscono alla Terra densità crescenti verso il nucleo in modo che sia spiegabile la densità media terrestre, non vi sia contraddizione con la densità media delle rocce di superficie e sia spiegabile l'andamento della velocità di propagazione delle onde sismiche.

L'elaborazione matematica di un gran numero di dati ed elementi raccolti al fine di realizzare modelli in grado di confortare e validare i fenomeni osservati costituisce il cosiddetto metodo d'indagine della geofisica pura.

La geofisica viene così aggiornata e migliorata grazie all'osservazione di una gran mole di dati a livello globale su tutta la superficie terrestre. Pertanto, la comunità internazionale crea reti di stazioni geofisiche per attuare programmi comuni in stretta collaborazione tra i paesi membri.

La prevalenza dei dati dell'osservazione su quelli meramente sperimentali è la conseguenza naturale dell'impossibilità della riproduzione dei fenomeni fisici naturali osservati in scala e in laboratorio, anche a causa del notevole numero di variabili ambientali connesse.

La geofisica applicata estende il proprio campo di attività alla risoluzione di problemi nel campo ingegneristico, sia esso geodetico, civile, ambientale, idraulico, minerario, ponendo attenzione alla ricerca delle misure, all'interpretazione e ai meccanismi teorici che regolano la propagazione nel terreno e nei materiali antropici di segnali geofisici di diversa natura (sismici, elettromagnetici, elettrici, gravimetrici, magnetici).

L'obiettivo principale è quello di determinare in maniera indiretta la sequenza di strutture geologiche sepolte o corpi sotterranei, individuandone dimensioni e profondità attraverso misurazioni, effettuate in superficie, di alcuni parametri fisici e delle loro variazioni. I parametri più misurati con le prospezioni geofisiche sono la densità, la suscettività magnetica, la conducibilità elettrica, le proprietà elastiche di taluni materiali.

## INTRODUZIONE

Ciascuno di tali parametri dà origine ad un metodo di prospezione, rispettivamente gravimetrico, magnetico, elettrico ed elettromagnetico, sismico. Ogni metodo utilizza una grande varietà di tecniche di indagine.

Il metodo gravimetrico e quello magnetico, ma in generale i metodi di potenziale, effettuano misure in corrispondenza di stazioni di coordinate note, misurano cambiamenti spaziali e temporali molto piccoli nella gravità terrestre e campi di forza magnetica, possono essere utilizzati sia in scala sottomarina che in scala globale.

Il metodo della gravità è comunemente indicato come “metodo del campo potenziale” perché comporta misurazioni che sono una funzione del potenziale del campo di forza gravitazionale osservato della Terra.

Il potenziale, definito dalla quantità di lavoro svolto nello spostamento di una particella da una posizione all'altra in presenza di un campo di forza che agisce sulla particella, è funzione dello spazio del campo di forza tale che il suo tasso di cambiamento è il componente della forza in quella direzione. Tale quantità è correlata all'accelerazione di gravità misurata con il metodo della gravità.

Leggi e teoremi fondamentali della fisica, come le equazioni di Laplace e di Poisson, la legge di Gauss e il teorema di Poisson, risultano utili per comprendere le proprietà del campo di gravità e la sua analisi.

La fase interpretativa che segue l'applicazione del metodo gravitazionale serve a valutare le cosiddette anomalie di valori derivati dall'elaborazione dei dati acquisiti.

L'anomalia di gravità è la grandezza fisica che esprime l'entità della variazione (surplus o deficit) di massa rispetto alla massa di un ellissoide di rotazione omogeneo e teorico di riferimento. Essa è definita come la differenza tra l'accelerazione di gravità misurata sul geoide (valore misurato indirettamente) rispetto a quella calcolata sull'ellissoide (valore normale o teorico di riferimento).

Il modello teorico di riferimento si basa tipicamente su alcune assunzioni semplificative come quella che il pianeta, per effetto del proprio moto rotazionale e della sua gravità intrinseca, assuma la figura di un ellissoide di rotazione e in particolare di uno sferoide oblato. La gravità sulla superficie dell'ellissoide è allora data da una semplice formula che tiene conto esclusivamente della latitudine; la discrepanza con il valore effettivamente osservato della gravità in un dato punto fornisce l'anomalia gravitazionale.

I valori delle anomalie sono tipicamente molto più piccoli del valore della gravità, poiché vengono preliminarmente sottratti i contributi della massa totale del pianeta, della sua rotazione e della deformazione collegata. Le anomalie gravitazionali descrivono pertanto le variazioni locali del campo gravitazionale rispetto al campo



## INTRODUZIONE

teorico. Una anomalia gravitazionale positiva indica un valore di gravità superiore a quella prevista dal modello, suggerendo la presenza di un'anomalia di massa positiva al di sotto della superficie; al contrario, una anomalia negativa indica un valore inferiore al previsto, relativo a un deficit di massa subsuperficiale. Queste anomalie sono di particolare interesse in ambito geofisico, geodetico e geologico.

Una volta effettuate le misurazioni di gravità sulla topografia a livello del mare, occorre compiere un accurato processo di riduzione dei dati per ottenere valori utilizzabili delle anomalie gravitazionali, che possono essere di vario tipo. L'estrazione corretta dei risultati per ottenere una geologia subsuperficiale è il compito tipico della geofisica applicata.

Il processo in sé è abbastanza complicato. Tuttavia l'uso di calcoli matematici intensivi e complessi può condurre ad una valutazione qualitativa delle anomalie. Il processo impiegato è effettivamente dipendente dalla complessità del modello di anomalia ipotizzato.

L'interpretazione dei dati sulla gravità di solito coinvolge la modellazione iterativa di un sottosuolo geologicamente noto in ragione delle sorgenti di gravità, finché non si ottiene una corrispondenza approssimativa con le anomalie osservate. Diversamente, l'interpretazione dei dati può avvenire tramite un processo inverso in cui i dati noti vengono determinati sulla base dei calcoli effettuati direttamente dall'analisi delle anomalie fino a convergervi.

Tutte le interpretazioni dei valori di gravità sono soggette ad ambiguità, il cui grado è determinato dal controllo che può essere esercitato sull'interpretazione dei risultati di altri metodi geofisici e dalle relative informazioni geologiche.

I modelli elaborati con espressioni analitiche in forma chiusa coinvolgono sorgenti idealizzate con semplice simmetria di forme (ad esempio sferiche, cilindriche, prismatiche) che possono essere integrate nel volume in forma chiusa rispetto al punto di osservazione.

I modelli avanzati senza espressioni in forma chiusa coinvolgono sorgenti con irregolarità di forme che devono essere integrate numericamente, riempiendo i volumi con sorgenti idealizzate e sommando gli effetti nel punto di osservazione.

L'integrazione numerica può essere eseguita con l'accuratezza della teoria dei minimi quadrati distribuendo sorgenti idealizzate in tutta la sorgente generale secondo una decomposizione con la quadratura di Gauss - Legendre del volume irregolare.

Le distribuzioni di massa possono essere modellate in varie forme per interpretare il significato delle anomalie di gravità.

## INTRODUZIONE

Il metodo gravimetrico implica un'analisi dettagliata delle anomalie del campo gravitazionale terrestre, indotte dalle eterogeneità presenti nel sottosuolo.

Il campo gravitazionale, compreso il potenziale gravitazionale e le sue derivate prima e seconda, è una delle proprietà fondamentali della Terra. Fornisce approfondimenti sulle distribuzioni della densità di massa, come le strutture interne e le variazioni di densità del sottosuolo.

Il calcolo degli effetti gravitazionali dovuti a date distribuzioni di massa è un problema fondamentale nelle applicazioni della geofisica e della geodesia.

La teoria del potenziale può essere utilizzata solo in parte in geofisica: nella gravità, nel magnetismo, nei metodi di calcolo del flusso di calore elettromagnetico, elettrico e nel calcolo del flusso di fluidi. Perciò la teoria del potenziale, con l'uso di strumenti matematici complessi, costituisce la base per la soluzione di diversi problemi geofisici, riuscendo di fatto a essere quasi indispensabile per comprendere al meglio alcuni dati geofisici.

L'avvento della teoria inversa ha rivoluzionato l'intera procedura per l'interpretazione dei dati geofisici. Ciò è stato reso possibile grazie al rapidissimo sviluppo dell'informatica, della tecnologia che ha migliorato i software di calcolo e dei numerosi metodi utilizzati nella modellazione matematica.

Nel lavoro di tesi presenterò nuove espressioni per il potenziale gravitazionale che comportano capacità computazionali alternative e meno onerose rispetto a quelle riportate nella letteratura specializzata.

Mostrerò che le singolarità che possono influenzare il calcolo degli effetti della gravità (potenziale, gravità e campi gradiente tensore) possono essere sistematicamente indirizzate invocando la teoria della distribuzione con opportune formule di calcolo differenziale.

L'approccio generale sarà riferito al caso di modelli di corpi poliedrici, regolari e non, aventi densità di massa costante o variabile con la profondità.

Le formule analitiche validate sono state pienamente confermate da applicazioni con programmi in Matlab®, codificati e accuratamente testati calcolando gli effetti della gravità indotti da corpi attraenti posizionati in punti di osservazione arbitrari. Le formule illustrate nella tesi sono state controllate numericamente con quelle alternative derivate sulla base di diversi approcci, già stabilite in letteratura scientifica, testando in modo intensivo e ripetuto gli effetti della gravità indotti da corpi attraenti reali con variazioni di densità assegnate arbitrariamente.

## INTRODUZIONE

L'efficienza delle formule proposte risiede nella capacità di valutare correttamente le singolarità che si presentano nei casi in cui i punti attratti occupano diverse posizioni della massa attraente.

L'attività di ricerca è stata ulteriormente implementata con l'introduzione di formulazioni analitiche basate sulla approssimazione delle masse del terreno con forme di prismi verticali considerati come prismi con densità polinomiale.

Si valuta analiticamente l'anomalia gravitazionale associata a un corpo poliedrico di forma geometrica arbitraria e a valori diversi di densità polinomiale in entrambi le direzioni orizzontali e verticali. L'anomalia della gravità viene valutata in un punto arbitrario che non coincide necessariamente con l'origine del sistema di riferimento in cui si trova la funzione di densità assegnata.

Invocando i recenti risultati della teoria potenziale, le soluzioni si sono dimostrate essere prive di singolarità e sono espresse come somma di quantità algebriche che dipendono solo dai vertici del poliedro e dalla funzione di densità del polinomio. L'accuratezza, la robustezza e l'efficacia dell'approccio sono dimostrabili con elaborazioni numeriche sulla base di esempi derivati dalla letteratura esistente.

Tutto ciò perché è noto che nella maggior parte delle strutture geologiche l'ipotesi di densità costante non è realistica. L'evoluzione geologica di un bacino sedimentario è caratterizzata da fenomeni di compattazione per cui la densità aumenta esponenzialmente con la profondità.

# **1. CAPITOLO 1 – APPLICAZIONI DEI METODI GRAVIMETRICI E MAGNETICI**

## **1.1 Introduzione**

In questo capitolo saranno trattate le applicazioni dei metodi gravimetrici e magnetici per l'esplorazione del sottosuolo. Tali applicazioni risultano importanti per la comprensione e la determinazione della natura, della composizione e della struttura della terra. Esse si basano sui principi fondamentali della gravità terrestre e dei campi magnetici.

## **1.2 Panoramica generale delle applicazioni**

I metodi geofisici hanno avuto un ruolo fondamentale nel determinare la natura della Terra, contribuendo al nostro stato attuale di conoscenza dell'origine e dell'evoluzione del nostro pianeta e di tutti i processi coinvolti nel sistema Terra. Inoltre, hanno contribuito a migliorare la qualità della vita dell'uomo studiando potenziali pericoli naturali e la localizzazione di risorse sfruttabili.

I metodi gravimetrici e magnetici sono tra le più importanti tecniche geofisiche per lo studio di quella parte del pianeta Terra che non vediamo. Inizialmente, i metodi gravimetrici e magnetici furono finalizzati, quasi interamente, alla risoluzione di problemi su scala globale. Successivamente, per quasi tutto il secolo scorso, sono stati anche utilizzati per la ricerca e le indagini di risorse naturali e per lo studio di potenziali pericoli naturali. Questa finalità è stata in gran parte guidata da bisogni umani e dallo sviluppo di tecnologie sempre più avanzate, a cominciare dalla ricerca degli idrocarburi conseguente al marcato aumento della domanda di petrolio e di gas a partire dagli anni '20 del secolo scorso.

Ai progressi della tecnologia, ancora oggi in evoluzione, contribuiscono allo stesso modo anche gli studi di ricerca della Terra nel campo delle indagini applicate.

I metodi gravimetrici e magnetici hanno numerose e interessanti peculiarità e caratteristiche anche qualitative. Sono, generalmente, meno costosi di altri metodi

geofisici e possono essere osservati con valori relativi di densità e precisione soddisfacenti per applicazioni in un intervallo di interesse che spazia dalle perforazioni terrestri a quelle marine, da quelle aviotrasportate e a quelle su piattaforme satellitari.

Tuttavia, le loro misurazioni raramente danno una risposta univoca e inequivocabile a un problema esplorativo o geologico. Di conseguenza un segno distintivo del successo dell'applicazione del metodo della gravità e dei metodi magnetici è la loro sinergia nell'essere utilizzati in combinazione con i dati geofisici ausiliari e le informazioni geologiche collaterali per ridurre eventuali ambiguità (Saltus e Blakely, 2011).

Un altro importante attributo che amplia la loro applicazione è la disponibilità alla loro commercializzazione e ad essere utilizzati da un vasto pubblico; set di dati precisi sono disponibili per l'intero globo terrestre.

Sebbene la densità dei dati e, in molti casi, la qualità di questi set di dati siano insufficienti per gli studi localizzati, sono, tuttavia, utili in molte indagini regionali o servono come base per studi più localizzati.

Le applicazioni dei metodi di gravità e dei metodi magnetici sono divise in quattro categorie principali: studi prossimi alla superficie terrestre, applicazioni relative a ricerche di risorse energetiche, esplorazione delle risorse minerali e indagini litosferiche.

Gli studi effettuati in prossimità della superficie riguardano l'applicazione dei metodi di gravità e magnetici alle indagini relative alla Terra per l'ingegneria, per l'ambiente e per l'archeologia. Le problematiche connesse riguardano la risoluzione di problemi che sono in gran parte concentrati sulla superficie della Terra.

Il metodo gravimetrico implica un'analisi dettagliata delle anomalie del campo gravitazionale terrestre, indotte dalle eterogeneità presenti nel sottosuolo. La gravimetria, e più in particolare la microgravimetria, sono metodi geofisici impiegati in particolar modo in ambiti dove le informazioni da determinare sono legate ai contrasti di densità tra le strutture e/o corpi sepolti.

Il metodo magnetico è stato impiegato per un'ampia varietà di problemi relativi alla mappatura del sottosuolo; infatti è stato utilizzato per la prima volta nel XVII secolo per localizzare depositi sepolti, altamente magnetici, di minerale di ferro.

Le applicazioni relative alle esplorazioni delle risorse energetiche sono concentrate sullo sfruttamento di idrocarburi, ma includono anche casi studio dell'uso dei metodi della gravità e del magnetismo nelle indagini sulla ricerca del carbone e delle risorse geotermiche.

L'esplorazione delle risorse minerali comprendono studi indiretti e diretti in gran parte per individuare giacimenti metallici, sebbene vengano presentati esempi sull'uso dei metodi nella ricerca di diamanti e dell'uranio.

Infine, le applicazioni alle indagini sulla litosfera riguardano l'ampio uso degli studi della gravità e del magnetismo sulla crosta continentale, su quella oceanica e sul mantello superiore che costituiscono la litosfera rigida della Terra.

È facile intuire che nuove e migliori applicazioni sull'uso dei metodi di gravità e magnetici si ottengono grazie ad una più facile accessibilità ai dati e alla loro alta qualità.

Ad esempio, l'aumento della precisione nelle osservazioni della gravità ha portato a nuove applicazioni legate alle variazioni temporali nei movimenti di fluidi e gas nel sottosuolo. Sono migliorate le misurazioni e elaborazioni magnetiche dando nuova vita allo studio delle anomalie di bassa ampiezza associate ai riempimenti di bacini sedimentari. Una delle caratteristiche più notevoli della casistica è legata all'ampiezza della scala delle applicazioni dei metodi gravitazionali e magnetici. Lunghezze d'onda di impiego nello studio della gamma terrestre vanno dal metro fino ad anomalie misurate in migliaia di chilometri, il tutto associato a fonti estese e profonde. Allo stesso modo, ampiezze di anomalie di notevole interesse oggi coprono diversi ordini di grandezza.

### **1.2.1 Studi in prossimità della superficie**

L'indagine sulla natura del sottosuolo è estremamente importante per via della necessità di assicurare la stabilità a lungo termine delle costruzioni.

L'ampiezza e l'intensità di queste indagini sono notevolmente aumentate negli ultimi decenni per effetto dell'importanza che rivestono ai fini della salvaguardia per l'uomo e per l'ambiente contro i rischi potenziali derivanti dalla presenza di strutture critiche come dighe, ponti, depositi di rifiuti e impianti nucleari. I rischi sono aumentati dall'espansione della popolazione mondiale e dallo sviluppo di centri urbani, obbligando la costruzione di strutture in condizioni del sottosuolo che possono non essere favorevoli ai fini delle costruzioni stesse.

Anche gli studi in prossimità della superficie hanno assunto un ruolo maggiore nella determinazione delle caratteristiche del sottosuolo che controllano, all'occorrenza, il movimento e la qualità di acque sotterranee per gli usi umano, agricolo e industriale.

Inoltre, tali studi si sono notevolmente incrementati in risposta alle emergenze ambientali, poiché indirizzati all'identificazione di regioni del sottosuolo che siano state alterate dall'uomo e richiedano attività di bonifica e recupero.

In misura minore la necessità di individuare e mappare siti archeologici di epoca preistorica dell'attività umana ha favorito l'aumento delle indagini vicino alla superficie terrestre. I metodi di gravità e magnetici hanno un ruolo importante in tali indagini ravvicinate. Recenti miglioramenti tecnologici nell'osservazione, elaborazione e analisi di questi dati hanno reso questi metodi più efficienti e più sensibili, e quindi applicabili a una gamma crescente di problematiche.

I metodi sono particolarmente utili nella mappatura della posizione di contatti poco stabili tra formazioni del sottosuolo con diverse proprietà caratteristiche originarie. In tal caso tali contatti possono rappresentare un pericolo significativo per l'integrità delle strutture sensibili superficiali realizzate dall'uomo.

Di conseguenza, i metodi di gravità e magnetici sono comunemente usati nella fase di ricognizione delle indagini per localizzare le regioni che includono faglie in forte flessione e contatti litologici per studi intensivi, in alternativa a metodi a risoluzione più elevata che richiedono costi più elevati, procedure ed elaborazioni dispendiose in termini di tempo per il rilevamento su campo.

Questo uso è particolarmente appropriato per il metodo magnetico più efficace in entrambe le acquisizioni e nel trattamento dei dati.

I metodi di gravità e magnetici sono particolarmente utili nelle vicinanze del sottosuolo dove gli oggetti di ricerca sono piccoli rispetto al volume della regione di studio, ma hanno un elevato contrasto della proprietà in confronto ai terreni o alle rocce circostanti. Esempi sono la ricerca di ordigni sepolti e inesplosi, oggetti archeologici metallici e cavità del sottosuolo nelle rocce carbonatiche o vulcaniche.

Questi metodi sono utili anche dove è necessario indagare un volume della superficie vicina in modo non invasivo, come ad esempio nelle discariche e nei depositi. Inoltre, sono particolarmente sensibili alle interfacce sotterranee verticali vicine, difficili da mappare con la tecnica del radar ad alta risoluzione e/o con i metodi di indagine di riflessione sismica utilizzati in prossimità della superficie.

## **1.2.2 Applicazioni alle risorse energetiche**

I metodi geofisici hanno un ruolo significativo nell'aumento dell'efficienza dell'esplorazione e dello sfruttamento delle risorse energetiche della terra, compreso il petrolio e i gas naturali, il carbone e le fonti di energia geotermica. Questi metodi

indiretti sono particolarmente importanti nella ricerca e nella produzione di risorse di idrocarburi a causa della continua necessità di scoprire nuovi giacimenti che in gran parte si trovano a profondità crescenti e con limitati o non osservabili evidenze superficiali.

Fin dai primi giorni dell'esplorazione moderna, i metodi di gravità e i metodi magnetici hanno avuto un ruolo importante nella ricerca del petrolio e del gas. Nella prima metà del XX secolo, il metodo della gravità, in particolare, ha giocato un ruolo centrale negli Stati Uniti d'America nello sviluppo della Costa del Golfo nella ricerca di giacimenti petroliferi statunitensi associati a diapiri salini, a causa delle intense anomalie di gravità risultanti dal forte contrasto di densità tra il sale e le rocce sedimentarie intruse.

Il primo risultato utile della geofisica applicata all'esplorazione degli idrocarburi è stata la mappatura del Nash Dome in Texas con il metodo della gravità nel 1924.

Il primo sviluppo dei gravimetri e dei magnetometri portatili, ad alta sensibilità, fu dovuto in gran parte in risposta al loro ruolo nella localizzazione di nuovi giacimenti di petrolio. Questi strumenti sono stati utilizzati nelle indagini regionali e negli studi localizzati in particolari situazioni geologiche.

Tuttavia, miglioramenti nella strumentazione sismica, nella registrazione e nel trattamento automatico dei dati nella seconda metà del secolo scorso hanno portato il metodo della riflessione sismica in primo piano nei metodi di gravità e nei metodi magnetici applicati all'esplorazione di idrocarburi.

I metodi gravitazionali e magnetici conservano il loro ruolo fondamentale nel fornire informazioni tettoniche e geologiche regionali per la pianificazione esplorativa, nella interpretazione complementare della riflessione sismica e nella identificazione di informazioni dettagliate sulle caratteristiche geologiche di interesse per il petrolio e per l'esplorazione del gas.

Il metodo della gravità, in particolare, ha un ruolo importante nel supporto e nel perfezionamento dell'interpretazione di studi sulla riflessione sismica.

I metodi di gravità e magnetici si sono dimostrati particolarmente utili nell'esplorazione di idrocarburi sin dallo sviluppo di metodi di precisione per la misurazione della gravità e del campo magnetico da navi e da piattaforme aeree, per la localizzazione e il posizionamento preciso delle osservazioni. La gravità aerea e la gradiometria magnetica, il posizionamento GPS e le misurazioni della gravità oceanica derivate da satellite si stanno rivelando particolarmente efficaci nell'estendere la gamma e l'efficacia dei metodi di gravità e magnetici, e, quindi, sono ampiamente utilizzati nell'esplorazione di idrocarburi.



Per consentire l'accumulo di depositi di idrocarburi si devono verificare una serie di condizioni come: volume sufficiente di appropriate rocce sorgenti, condizioni termiche per la generazione di petrolio e gas da rocce ricche di sostanze organiche, percorsi per la loro migrazione verso l'alto e verso i serbatoi, spazio vuoto nelle rocce serbatoio e caratteristiche geologiche che saranno in grado di intrappolare il petrolio e il gas, più leggeri dell'acqua, che salgono attraverso le profondità terrestri. Di conseguenza, in maniera essenziale, tutti i depositi di idrocarburi si insediano in sequenze spesse di rocce sedimentarie o molto meno frequentemente nelle rocce ignee all'interno della colonna di roccia sedimentaria.

I metodi di gravità e magnetici possono fornire utili informazioni relative a tutte queste condizioni per l'accumulo di idrocarburi, anche se è solo in situazioni specifiche che questa informazione è definita da uno solo dei due metodi. Infatti, il metodo gravimetrico permette di definire con maggior precisione le anomalie locali: la mappa risultante risolve meglio le anomalie da situazioni di sovrapposizione e consente di precisare ulteriormente i parametri di calcolo. Si ottiene in tal modo una mappa che fornisce indicazioni anche su eventuali corpi magnetizzati al di sopra del basamento (intrasedimentari).

Questi metodi sono utili anche per la localizzazione e la valutazione delle rocce serbatoio che intrappoleranno il gas naturale e l'anidride carbonica che vengono pompate al loro interno, fornendo depositi naturali sotterranei. In tal senso, lo stoccaggio geologico di anidride carbonica potrebbe essere un elemento importante nella mitigazione dei gas serra; uno stoccaggio sotterraneo fornisce flessibilità nella distribuzione del gas naturale ai consumatori evitando di produrne ulteriori quantità.

La gravità regionale e le indagini magnetiche sono dei modi relativamente economici per mappare la profondità e la configurazione delle rocce cristalline del basamento. I metodi magnetici, con il loro maggiore potere risolutivo, sono particolarmente efficaci a questo proposito perché possono essere utilizzati per mappare la parte superiore di sorgenti magnetiche interrato.

La mappatura della superficie del substrato interrato dà indicazioni sul volume sovrastante delle rocce sedimentarie e, quindi, sulla presenza potenziale del petrolio nei bacini sedimentari.

Inoltre, la mappatura della geologia degli strati interrati è importante perché le strutture intrabacino e le caratteristiche stratigrafiche di interesse per l'esplorazione del petrolio sono comunemente correlate alla riattivazione delle caratteristiche del sottosuolo o come risultato della compattazione differenziale all'interno della sequenza sedimentaria con profondità variabili.

Studi profondi della crosta e del mantello superiore con i metodi di gravità e magnetici possono fornire indizi per maggiori controlli sulla tettonica e la distribuzione delle temperature che riguardano la maturazione dei giacimenti di idrocarburi.

Studi magnetici e gravitazionali ad alta risoluzione e precisione focalizzati su componenti con numero d'onda dei campi più alto (ovvero maggiori energie di propagazione, essendo il numero d'onda direttamente proporzionale all'energia della radiazione) sono utili nello studio della gravità e delle anomalie magnetiche derivate da faglie intrabacino, dei diapiri, delle variazioni stratigrafiche e delle zone di alterazione. Il numero d'onda è strettamente legato al vettore d'onda, una grandezza vettoriale che trova largo impiego in sismologia, in meccanica quantistica, nella fisica dello stato solido e nella diffrazione dei raggi X.

Studi magnetici e gravitazionali possono fornire utili informazioni relativamente al percorso migratorio degli idrocarburi, sui parametri della roccia del serbatoio e, in particolare, sulle strutture della sequenza sedimentaria che fornisce trappole per il petrolio ascendente e per i gas.

Inoltre, negli ultimi decenni il metodo diretto di misure di gravità è stato studiato come strumento di monitoraggio di movimenti di fluidi e di gas in giacimenti, grazie a misurazioni di alta sensibilità.

La fattibilità di entrambi i metodi è in gran parte dovuta alla loro efficacia in termini di costi nel miglioramento dell'esplorazione della Terra, ma anche al loro ruolo unico nella mappatura del sottosuolo.

Sebbene l'uso primario dei metodi della gravità e magnetico nelle applicazioni relative alla ricerca di risorse energetiche della Terra è nel campo dell'industria petrolifera e del gas, occorre sottolineare come i metodi siano utilizzati anche in altri studi sulle risorse energetiche, ad esempio nello sfruttamento delle risorse del carbone mappando principalmente la struttura delle formazioni che possono essere importanti nelle operazioni minerarie.

Il metodo magnetico può essere utile per rilevare aree di precedenti combustioni di carbone nel sottosuolo, perché le proprietà del campo magnetico delle formazioni sono esaltate dai processi di combustione.

Il metodo magnetico è stato utilizzato con successo per localizzare e studiare regioni ad alto flusso di calore terrestre che può fungere da fonte potenziale di energia geotermica. Le alte temperature associate a queste regioni producono modificazioni mappabili delle proprietà magnetiche delle rocce.

### **1.2.3 L'esplorazione di risorse minerarie**

L'aumento della popolazione della Terra e il desiderio di migliorare la qualità della vita porta a un crescente bisogno di risorse minerarie. La domanda è stata ed è probabile che sarà accresciuta dal continuo miglioramento del tenore di vita nelle nazioni in via di sviluppo. Questa richiesta deve essere soddisfatta almeno in parte da nuove scoperte di minerali che integreranno le attuali riserve minerarie. Questi nuovi depositi è probabile che mostrino poche o nessuna evidenza superficiale diretta della loro esistenza, e quindi dovranno essere scoperti dalle tecniche della geofisica che rilevano a distanza i depositi in profondità.

Nel corso della storia, i giacimenti di minerali e di metalli sono stati trovati da "pionieri" alla ricerca di tracce di mineralizzazione nei materiali di superficie. In tempi più recenti, i depositi di minerali sono stati trovati attraverso la mappatura geologica supportata da esplorazioni geochemiche e geofisiche.

I minerali facenti parte di risorse minerarie nel senso più ampio includono tutti i prodotti che è possibile estrarre economicamente dalla Terra.

Le applicazioni della geofisica alle risorse minerarie sono notevoli, e spaziano dal campo della ricerca di minerali, dall'alluminio allo zinco, fino alla ricerca della natura di questi depositi per migliorare il loro sfruttamento.

I minerali hanno un'ampia varietà di proprietà fisiche, e possono essere individuati in una varietà di contesti geologici che comprendono essenzialmente tutti i tipi di rocce, sedimenti, suoli e terreni alluvionali. Di conseguenza, da lungo tempo, una vasta gamma di metodi geofisici e i metodi magnetici sono utilizzati nelle applicazioni della ricerca delle risorse minerarie.

Tali metodi hanno acquisito maggiore rilevanza e facilità d'impiego perché si prestano anche all'osservazione da piattaforme aeree, e questo ha stimolato il loro utilizzo nelle indagini su vaste aree della Terra e su una vasta gamma di scale di osservazione. Tuttavia, il loro ruolo nelle applicazioni delle risorse minerarie è in qualche modo diverso da quello per l'esplorazione di petrolio e gas. Come descritto in precedenza, questi metodi sono utilizzati principalmente in studi di ricognizione e indagini di dettaglio specializzate nell'esplorazione e nello sfruttamento di idrocarburi.

Di contro, metodi di gravità e magnetici sono ampiamente utilizzati in una vasta gamma di applicazioni nella ricerca di risorse minerarie in aree di regioni continentali e anche con prospettive più limitate.

La maggior parte dei giacimenti di minerali si trova all'interno o in prossimità di rocce cristalline, rocce ignee compresse, rocce vulcaniche e plutoniche, rocce

metamorfiche. Anche se i giacimenti di minerali non sono direttamente rilevabili, i metodi di gravità e i metodi magnetici sono ampiamente utilizzati in questi terreni come guida alla mappatura geologica. Sono infatti particolarmente utili nella mappatura della struttura e, in condizioni appropriate, possono essere utilizzati per isolare specifiche formazioni geologiche e per identificare i tipi di roccia a causa della forte magnetizzazione e del contrasto di densità presente nelle formazioni rocciose.

Tuttavia, particolare cura è utilizzata nell'identificazione di tipi di roccia in virtù delle anomalie magnetiche e gravitazionali, ciò esclusivamente sulla base delle ampiezze e dei modelli di anomalia, a causa delle sovrapposizioni delle loro caratteristiche.

I giacimenti minerari possono essere direttamente correlati sia ad anomalie di gravità che ad anomalie magnetiche, sia positive che negative che, a seconda delle proprietà fisiche, contrastano con le rocce che li racchiudono. Tuttavia, queste anomalie sono raramente individuabili in virtù della loro ampiezza, forma o dimensioni.

Ampie indagini sul campo dimostrano che la natura delle anomalie di un giacimento minerario può essere aumentata da un'ampia varietà di fonti geologiche estranee e può essere nascosta in errori commessi nell'ambito dell'osservazione stessa, nell'elaborazione e nell'interpretazione sia della gravità che dei dati magnetici. Questo è in particolare il caso delle basse ampiezze di anomalie del giacimento di minerali, che raramente superano pochi milligal e poche centinaia di nanotesla e in cui la loro area ha dimensioni limitate.

Diversi fattori aggiuntivi complicano l'identificazione dei giacimenti minerari specifici sulla base delle loro anomalie di gravità e magnetiche. Le ampiezze dell'anomalia diminuiscono con la profondità della sorgente in modo che i giacimenti minerari profondi (quelli di più di poche centinaia di metri di profondità) sono raramente grandi o hanno contrasti di proprietà fisiche abbastanza intensi tali da produrre anomalie identificabili sulla base di un livello determinato di osservazione.

Il rapporto tra ampiezza e profondità è complesso. L'ampiezza dell'anomalia magnetica diminuisce con una potenza maggiore di quella dell'anomalia di gravità per la stessa configurazione della sorgente; nelle sorgenti compatte come i giacimenti minerari le ampiezze delle anomalie diminuiscono più rapidamente con la profondità rispetto a sorgenti che hanno dimensioni orizzontali significative.

Inoltre, le anomalie provenienti da fonti più profonde hanno maggiore energia in lunghezze d'onda maggiori. Questi fattori complicano l'identificazione delle anomalie del giacimento di minerali in un campo complesso di anomalie.

Sebbene i giacimenti di minerali abbiano, generalmente, una densità pari all'incirca al doppio di quella dei comuni minerali che formano le rocce e le proprietà del campo magnetico di alcuni giacimenti di minerali e dei minerali associati possono avere diversi ordini di grandezza maggiori anche di quelli delle rocce che li racchiudono, tali complessi minerari sono solitamente disseminati attraverso il giacimento minerario in misura tale che il contrasto totale delle proprietà fisiche sarà limitato ed eterogeneo, in modo tale da minimizzare le ampiezze dell'anomalia.

Pertanto, l'ampia diversità nei segnali di gravità e nelle anomalie magnetiche associate a corpi minerari complica notevolmente la loro identificazione e interpretazione. Generalmente, l'esplorazione è focalizzata su uno o pochi tipi di risorse minerarie e l'attuazione dell'indagine e la relativa interpretazione dei risultati si sviluppa intorno a quella concettuale dei modelli geologici dei complessi minerari e al loro contesto all'interno della massa geologica.

Tuttavia, l'ambiguità nell'interpretazione dei metodi magnetici e gravitazionali porta ad una notevole incertezza sulla validità delle interpretazioni. Di conseguenza, i metodi di gravità e i metodi magnetici sono usati raramente senza analisi di sensibilità nell'interpretazione per valutare la credibilità dei risultati e senza integrare l'interpretazione con dati geologici e fisici e con dati sulle proprietà e i risultati provenienti da altre misurazioni geofisiche.

Con l'aumento della risoluzione, della precisione, e dell'accuratezza dell'osservazione, dell'elaborazione e dell'interpretazione della gravità e dei dati magnetici, questi metodi stanno assumendo un ruolo sempre più importante nello sfruttamento dei giacimenti minerari individuati. La modellazione inversa di anomalie isolate viene utilizzata per delineare l'entità di giacimenti minerari, guidando così lo sviluppo della perforazione e la massimizzazione del recupero dei minerali. Le anomalie di gravità sono, in genere, maggiormente utili nell'analisi quantitativa rispetto alle anomalie magnetiche, a causa della loro minore sensibilità alla profondità.

Inoltre, le anomalie di gravità possono essere utilizzate per stimare il tonnellaggio di un corpo minerale, ma raramente è possibile dedurre ipotesi su un corpo minerale a partire dalle anomalie geofisiche.

È possibile utilizzare la gravità e i dati magnetici anche per valutare potenziali problemi di sicurezza e ambientali nello sfruttamento delle risorse minerarie. Ad esempio, entrambi i metodi possono essere utilizzati per identificare i tipi di roccia e la posizione di faglie e zone di alterazione che influiscono sulla caratterizzazione degli ammassi rocciosi.

Questo approccio può fornire stime sulla resistenza di rocce in giacimenti minerari, così come le rocce adiacenti, che sono importanti per ottimizzare la progettazione mineraria e migliorare la sicurezza nelle operazioni minerarie.

I dati di gravità e magnetici possono essere utilizzati anche per mappare le formazioni geologiche che sono suscettibili di collasso a causa delle operazioni in miniere sotterranee.

Infine, il rilevamento della gravità può essere utilizzato per la mappatura della topografia del substrato roccioso che può controllare il movimento di acque nell'ambiente circostante a causa delle lavorazioni minerarie.

### **1.2.4 Indagini litosferiche**

Le indagini geofisiche sono state in gran parte responsabili nella definizione della litosfera della Terra e dei suoi attributi. La litosfera, che generalmente è costituita dalla crosta terrestre e dalla sottostante porzione superiore del mantello, è lo strato esterno rigido del nostro pianeta che sovrasta l'astenosfera.

L'astenosfera (dal greco *asthenēs* 'debole' + sfera), o zona delle basse velocità, è una fascia superficiale del mantello terrestre, giacente sotto la litosfera e sopra la mesosfera, compresa tra i 100 e 300 km di profondità, in cui le rocce sono parzialmente fuse. Con certezza è presente sotto la crosta oceanica, mentre sotto la crosta continentale non è stata ancora individuata, ma si presume che vi si possa trovare a profondità maggiori. Non si tratta di un confine petrolifero, ma piuttosto è il limite inferiore del guscio esterno della Terra relativamente forte che differisce in spessore tra placche oceaniche e continentali.

Lungo l'asse medio delle creste oceaniche può essere sottile come la crosta, ma generalmente negli oceani ha uno spessore compreso tra 50 e 100 km. Nelle regioni continentali in genere è più spesso, e va da 100 a 200 km.

Questa zona conserva la storia dei processi della Terra, sia i prodotti che la struttura risultanti dai movimenti e dalle perturbazioni termiche dell'astenosfera che interagiscono con le lastre sovrastanti, l'erosione e la modifica delle placche e la sedimentazione dei detriti che derivano dall'erosione.

Di conseguenza, i geologi studiano la natura della litosfera, la sua petrologia, la struttura e i processi per decifrare la storia della Terra e i potenziali rischi per l'uomo.

La perforazione profonda, limitata e superficiale della copertura diffusa di sedimenti derivati dall'erosione oltre che dalle acque terrestri rendono necessario percepire la natura della litosfera a distanza con metodi geofisici.

Tutti i metodi geofisici hanno contribuito essenzialmente alla nostra conoscenza della litosfera. Sebbene i metodi gravitazionale e magnetico siano stati tra i primi utilizzati per questo scopo, hanno assunto un ruolo secondario rispetto ai metodi sismici nel corso dei diversi decenni passati a causa del loro limitato potere risolutivo. Ciò nonostante, i metodi di gravità e magnetici continuano ad avere un ruolo importante, in particolare in quello degli studi strutturali sulla litosfera.

Ci sono notevoli variazioni nella densità e nella proprietà di magnetizzazione della crosta e del mantello superiore che compongono la litosfera. Di conseguenza, i metodi di gravità e magnetici hanno una ricca storia e un uso importante oggi nello studio della natura, della composizione e della struttura della Terra.

Ciò è particolarmente vero nella porzione cristallina della litosfera dove a causa delle deformazioni strutturali e intrusive è più probabile che gli eventi si traducano in contatti quasi verticali tra rocce di varie proprietà fisiche rispetto a quelli che normalmente esistono nella stratificazione in gran parte quasi orizzontale dei sedimenti sovrastanti e nelle rocce sedimentarie. Questi contatti quasi verticali si prestano a produrre anomalie di gravità e magnetiche molto più facilmente identificabili rispetto alle interfacce orizzontali.

La storia dello sviluppo e dell'uso dei metodi di gravità e magnetici è abbastanza diversa in termini di indagini litosferiche. Grandi caratteristiche geologiche regionali producono anomalie di gravità relativamente intense e facilmente mappate e identificate. Quindi, storicamente, le anomalie di gravità sono state utilizzate per mappare la scala continentale e subcontinentale delle strutture geologiche, come formazione di orogeni, bacini sedimentari e complessi intrusivi, nonostante che le misurazioni realizzate siano meno sensibili su ampi spazi per i limiti storici della strumentazione utilizzata.

I progressi nell'acquisizione di dati sulla gravità in termini di sensibilità e utilizzo delle piattaforme marine e aeree, nonché nel trattamento delle anomalie, hanno permesso di indagare caratteristiche geologiche sempre più piccole e dettagliate e ottenere una copertura densa su regioni non accessibili da terra, nonché una densa rete di misure.

Inoltre, queste indagini vengono realizzate in modo efficiente ed efficace impiegando misurazioni dell'accelerazione verticale e i valori delle sue variazioni (gradienti).

Di conseguenza, sono state ideate e codificate nuove applicazioni per le indagini gravitazionali che includono uno studio più dettagliato delle singole caratteristiche geologiche.

Al contrario, le prime indagini magnetiche erano in gran parte limitate a studi di caratteristiche di dettaglio in geologia, ma con la crescente sensibilità delle strumentazioni magnetiche, in particolare quelle a bordo di navi, quelle aviotrasportate e su piattaforme satellitari e con importanti miglioramenti nell'elaborazione dei dati, vi è stata una più ampia applicazione del metodo agli studi su più vaste aree regionali.

Questi studi regionali hanno reso possibile mappare, nelle misurazioni marine e aeree, caratteristiche dettagliate su vaste regioni della Terra. Questo è particolarmente vantaggioso per effetto dell'alta risoluzione ottenibile da misurazioni magnetiche, soprattutto quando si utilizzano misure di gradienti e tensori.

Così, per esempio, la mappatura magnetica della crosta oceanica sia dalle navi che dagli aerei ha permesso di osservare che le linee magnetiche e le loro interruzioni erano il principale indizio nello sviluppo del paradigma della tettonica a zolle e nella decifrazione della storia degli oceani e della loro interazione con i continenti.

Gli studi magnetici regionali hanno trovato importanti applicazioni nella mappatura di antiche suture crostali, di singoli plutoni ignei, di faglie, di vulcani, di antiche strutture di impatto e di un'ampia varietà di altre strutture e formazioni geologiche che hanno avuto un significativo impatto sulla nostra conoscenza della composizione della Terra, della sua storia e dei processi geologici.



## 2. CAPITOLO 2 - LA TEORIA DEL POTENZIALE GRAVITAZIONALE

### 2.1 Introduzione

Nel 1687 Isaac Newton propose la legge Universale di Gravitazione secondo la quale: ogni particella di materia nell'universo attrae tutte le altre con una forza direttamente proporzionale alla sua massa ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza della loro separazione.

Quasi un secolo dopo, Pierre Simon, Marchese De Laplace, dimostrò che l'attrazione gravitazionale obbedisce ad una semplice equazione differenziale, un'equazione che ora porta il suo nome.

L'equazione di Laplace è la più famosa e la più universale di tutte le equazioni differenziali parziali. Nessun'altra singola equazione ha così tante profonde e diverse relazioni matematiche e applicazioni fisiche.

La legge Universale di Gravitazione e l'equazione di Laplace sono state successivamente sviluppate in un trattato di matematica chiamato teoria del potenziale che descrive non solo l'attrazione gravitazionale ma anche una vasta serie di fenomeni, compresi i campi magnetostatici ed elettrostatici, campi generati da correnti elettriche uniformi, trasferimento di calore costante attraverso un mezzo omogeneo, flusso costante di fluidi ideali, comportamento dei solidi elastici, moto instabile dell'onda d'acqua e la teoria delle funzioni complesse.

#### 2.1.1 Campi potenziali

Un campo è un insieme di funzioni dello spazio e del tempo.

I campi materiali descrivono alcune proprietà fisiche di un materiale in ogni punto dello stesso e in un dato istante. Densità, porosità, magnetizzazione e temperatura sono esempi di campi materiali.

Un campo di forza descrive le forze che agiscono in ogni punto dello spazio in un dato momento. L'attrazione gravitazionale della terra e il campo magnetico indotto dalle correnti elettriche sono esempi di campi di forza.

I campi possono anche essere classificati come scalari o vettoriali. Un campo scalare è un'unica funzione dello spazio e del tempo; lo spostamento di una corda tesa, la temperatura di un volume di gas e densità all'interno di un volume di roccia sono campi scalari.

Un campo vettoriale, come il flusso di calore, la velocità di un fluido e l'attrazione gravitazionale, è caratterizzato da tre funzioni di spazio e del tempo, ovvero le componenti del campo in tre direzioni ortogonali relative ad un determinato istante.

L'attrazione gravitazionale e magnetica sono ciò che interessa nell'ambito di questo studio. Entrambi sono campi vettoriali, ovviamente, ma gli strumenti geofisici, generalmente, misurano solo una componente del vettore e quella singola componente costituisce un campo scalare.

Per esempio, i misuratori di gravità utilizzati nelle indagini geofisiche misurano la componente verticale  $g_z$  (un campo scalare) dell'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  (un campo vettoriale). Si applica la parola "campo" a  $g$  e  $g_z$ , in modo intercambiabile, senza distinguere i campi scalari dai campi vettoriali.

Un campo vettoriale può essere caratterizzato dalle sue linee di campo (note anche come linee di flusso o linee di forza), linee tangenti in ogni punto al campo vettoriale. Piccoli spostamenti lungo una linea di campo devono avere  $x$ ,  $y$  e  $z$ , componenti proporzionali alle corrispondenti componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$  del campo nel punto del suo spostamento.

Quindi, se  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale continuo, si dimostra che le sue linee di campo sono descritte dall'integrazione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d_x}{F_x} = \frac{d_y}{F_y} = \frac{d_z}{F_z} \tag{2. 1}$$

Si dimostra infatti che la più generale linea di campo è tale che:

$$\frac{d_x}{F_x} = \frac{d_y}{F_y} = \frac{d_z}{F_z}$$

equivalente al sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{F_z}{F_x} \end{cases}$$

Integrando tale sistema si ottiene una rappresentazione parametrica (omettendo le costanti di integrazione) della generica curva vettoriale, in cui l'ascissa  $x$  è il parametro della rappresentazione:

$$y = y(x), z = z(x), x \in X \subseteq \mathbb{R}$$

## 2.1.2 Punti, confini e regioni

Anche regioni e punti fanno parte del linguaggio della teoria del potenziale. Un insieme di punti si riferisce a un gruppo di punti nello spazio che soddisfano alcune condizioni. Generalmente, avremo a che fare con insiemi infiniti, insiemi che consistono in un continuum di punti che sono in numero infinito, anche se l'intero insieme può adattarsi entro un volume finito. Ad esempio, se  $r$  rappresenta la distanza da un punto  $Q$ , la condizione  $r < 1$  descrive un insieme infinito di punti all'interno e sulla superficie di una sfera di raggio unitario. Un insieme di punti è limitato se tutti i punti dell'insieme rientrano in una sfera di raggio finito. Consideriamo un insieme di punti  $\xi$ . Un punto  $P$  si dice punto limite di  $\xi$  se ogni sfera centrata in  $P$  contiene almeno un altro punto di  $\xi$  diverso da  $P$  stesso. Un punto limite non appartiene necessariamente all'insieme. Per esempio, tutti i punti che soddisfano  $r \leq 1$  sono punti limite dell'insieme di punti soddisfacente  $r < 1$ . Un punto  $P$  è un punto interno di  $\xi$  se una sfera intorno a  $P$  contiene solo punti di  $\xi$ . Allo stesso modo,  $P$  è un punto esterno di  $\xi$  se esiste una sfera centrata su  $P$  che non contiene punti di  $\xi$ .

Il confine di  $\xi$  è costituito da tutti i punti limite che non sono interni a  $\xi$ . Ad esempio, qualsiasi punto che soddisfi  $r = 1$  giace sul confine dell'insieme di punti che soddisfano  $r < 1$ . Un punto di frontiera di  $\xi$  è un punto che, sebbene non sia un punto esterno, è tuttavia un punto limite di tutti i punti esterni. L'insieme di tutti i punti di frontiera è la frontiera di  $\xi$ .

Un insieme di punti è chiuso se contiene tutti i suoi punti limite ed è aperto se contiene solo punti interni. Quindi, l'insieme dei punti descritto da  $r \leq 1$  è chiuso, mentre l'insieme dei punti  $r < 1$  è aperto.

Un dominio è un insieme aperto di punti in modo tale che due punti qualsiasi dell'insieme possano essere collegati da un insieme finito di segmenti di linea collegati, composti interamente da punti interni.

Una regione è un dominio con o senza una parte del suo confine, e una regione chiusa è una regione che include il suo intero confine. [1]

## 2.1.3 Teorema di Green

### *Le identità di Green*

Tre identità possono essere derivate dal calcolo vettoriale e dall'equazione di Laplace, e queste portano a diversi teoremi importanti e approfondimenti aggiuntivi nella natura dei campi potenziali. Sono indicate come identità di Green.

### *La prima identità di Green*

La prima identità di Green deriva dal teorema della divergenza. Siano  $U$  e  $V$  funzioni continue con derivate parziali continue di primo ordine in una regione chiusa e regolare  $R$ , e lasciamo che  $U$  abbia derivate parziali continue del secondo ordine in  $R$ . Il confine di  $R$  è la superficie  $S$ , e  $\hat{n}$  è la normale all'esterno di  $S$ .

Se  $\mathbf{A} = V\nabla U$ , allora:

$$\int_R \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_R \nabla \cdot (V\nabla U) \, dv = \int_R [\nabla V \cdot \nabla U + V\nabla^2 U] \, dv.$$

Usando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_R [\nabla V \cdot \nabla U + V\nabla^2 U] \, dS = \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS = \int_S V\nabla U \cdot \hat{n} \, dS = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} \, dS,$$

che equivale a

$$\int_R V\nabla^2 U \, dv + \int_R \nabla U \cdot \nabla V \, dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} \, dS.$$

(2. 2)

L'equazione 2.2 è la prima identità di Green ed è vera per tutte le funzioni  $U$  e  $V$  che soddisfano i requisiti di differenziabilità precedentemente indicati.

Diversi teoremi molto interessanti derivano dalla prima identità di Green, se  $U$  e  $V$  sono ulteriormente limitati. Ad esempio, se  $U$  è una funzione armonica e differenziabile continuamente in  $R$ , e se  $V = 1$ , allora  $\nabla^2 U = 0$ ,  $\nabla V = 0$ , e l'equazione 2.2 diventa

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} \, dS = 0.$$

(2. 3)

Quindi la derivata normale di una funzione armonica deve avere una media pari a zero su qualsiasi confine chiuso che circonda una regione in cui la funzione è armonica e continuamente differenziabile (Figura 2.1).

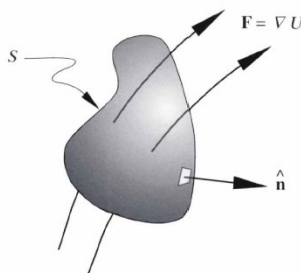


Figura 1- Regione R soggetta alla forza di campo  $F$

Può anche essere dimostrato (Kellogg [2] p. 227) che l'inverso dell'equazione 2.3 è vero; cioè, se  $U$  e le sue derivate del primo ordine sono continue in  $R$ , e  $\frac{\partial U}{\partial n}$  si integra a zero sul suo confine chiuso, quindi  $U$  deve essere armonica in tutto  $R$ . Pertanto, l'equazione 2.3 è condizione necessaria e sufficiente affinché  $U$  sia armonica in tutta la regione.

L'equazione 2.3 fornisce un'importante condizione al contorno per molti problemi geofisici. Supponiamo che il campo vettoriale  $F$  abbia un potenziale  $U$  il quale è funzione armonica in alcune regioni. Perché  $\frac{\partial U}{\partial n} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  sulla superficie della regione, l'equazione 2.2 può essere scritta come

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (2.4)$$

e applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\int_R \nabla \cdot \mathbf{F} dv = 0.$$

In poche parole, la componente normale di un campo conservativo deve avere un valore medio pari a zero sul confine chiuso di una regione in cui il suo potenziale è armonico. Quindi, il flusso di  $\mathbf{F}$  nella regione è esattamente uguale al flusso in uscita dalla regione, il che implica che non esistono fonti di  $\mathbf{F}$  nella regione. Inoltre, la condizione che  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  in tutta la regione è sufficiente per concludere che nessuna fonte si trova all'interno della regione.

Il flusso di calore allo stato stazionario, ad esempio, è funzione armonica in regioni prive di fonti di calore o pozzi e deve soddisfare l'equazione 2.4. Se la regione  $R$  è in equilibrio termico e non contiene sorgenti o pozzi di calore, il calore in entrata  $R$  deve essere uguale al calore in uscita  $R$ .

L'equazione 2.4 è spesso chiamata legge di Gauss e si rivelerà utile in seguito.

Sia ora  $U$  una funzione armonica nella regione  $R$  e sia  $V = U$ . Quindi, dalla prima identità di Green

$$\int_R (\nabla U)^2 dv = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

(2.5)

Si consideri l'equazione 2.5 quando  $U = 0$  su  $S$ . La parte destra dell'equazione sparisce e, poiché  $(\nabla U)^2$  è continuo per tutta  $R$  per ipotesi,  $(\nabla U)^2 = 0$ .

Pertanto,  $U$  deve essere una costante. Inoltre, poiché  $U = 0$  su  $S$  e poiché  $U$  è continua, la costante deve essere zero. Quindi, se  $U$  è armonica e differenziabile continuamente in  $R$  e se  $U$  svanisce in tutti i punti di  $S$ , anche  $U$  deve svanire in tutti i punti di  $R$ .

Questo risultato è intuitivo relativamente al flusso di calore in regime stazionario. Se la temperatura è zero in tutti i punti del confine di una regione e non vi sono sorgenti o pozzi all'interno della regione, quindi chiaramente la temperatura deve svanire in tutta la regione una volta raggiunto l'equilibrio.

La prima identità di Green porta a una dichiarazione sull'unicità, a volte detta teorema di Stokes. Siano  $U_1$  e  $U_2$  armonici in  $R$ . e abbiano condizioni identiche al contorno, cioè

$$U_1(S) = U_2(S).$$

Anche la funzione  $U_1 - U_2$  deve essere armonica in  $R$ . Ma  $U_1 - U_2$  scompare su  $S$  e il teorema precedente afferma che anche  $U_1 - U_2$  deve scomparire in ogni punto di  $R$ . Pertanto,  $U_1$  e  $U_2$  sono identici. Di conseguenza, una funzione che è armonica e differenziabile con continuità in  $R$  è determinata in modo univoco dai suoi valori su  $S$  e la soluzione del problema di valori al contorno di Dirichlet ammette soluzione unica.

Il teorema di Stokes ha un senso intuitivo quando è applicato al flusso di calore in regime stazionario. Una regione alla fine raggiungerà un equilibrio termico se il calore può fluire dentro e fuori la regione. Sembra ragionevole che, per qualsiasi insieme prescritto di temperature limite, la regione raggiungerà sempre la stessa distribuzione di temperatura di equilibrio in tutta la regione indipendentemente dalla distribuzione della temperatura iniziale.

In altre parole, la temperatura stazionaria della regione è unicamente determinata dalle temperature al contorno.

Anche l'integrale di superficie nell'equazione 2.5 svanisce se

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

su  $S$ . Una dimostrazione simile potrebbe essere sviluppata per mostrare che se  $U$  è un valore singolo, armonico, e differenziabile continuamente in  $R$  e se

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

su  $S$ , allora  $U$  è una costante in tutto  $R$ .

Se il confine di  $R$  è isolato termicamente, le temperature di equilibrio all'interno di  $R$  devono essere uniformi.

Inoltre, la funzione armonica a valore unitario è determinata in tutto  $R$  dai valori delle sue derivate normali sul confine, ad eccezione di una costante additiva.

*La seconda identità di Green*

Se scambiamo  $U$  e  $V$  nell'equazione 2.2 e sottraiamo il risultato dalla stessa equazione, otteniamo la seconda identità di Green,

$$\int_R [U\nabla^2 V - V\nabla^2 U] dv = \int_S \left[ U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS, \tag{2.6}$$

in cui si intende che  $U$  e  $V$  sono differenziabili con continuità e hanno derivate parziali continue di primo e secondo grado in  $R$ .

Nelle regioni dello spazio in cui  $U$  è armonica, abbiamo lo stesso risultato della 2.4.

*La terza identità di Green*

La terza identità di Green è leggermente più difficile da ottenere. Si inizia ponendo  $V = 1/r$  nella seconda identità di Green, in cui  $r$  è la distanza tra i punti  $P$  e  $Q$  all'interno della regione  $R$  fino ad ottenere:

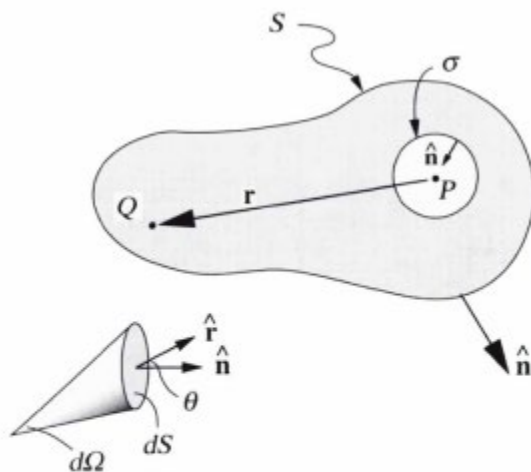


Figura 2 - Condizioni per la terza identità di Green

$$\int_R \left[ U \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \nabla^2 U \right] dv = \int_S \left[ U \frac{\partial 1}{\partial nr} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS,$$

quando  $P \neq Q$ .

Dato che

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$$

perché  $P \neq Q$ , circondiamo  $P$  con una piccola sfera escludendola dal dominio di integrazione  $R$ . L'equazione precedente diventa:

$$-\int_R \frac{1}{r} \nabla^2 U dv = \int_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS + \int_\sigma \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \quad (2.7)$$

Ponendo  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$  e  $\frac{\partial 1}{\partial nr} = -\frac{1}{r^2}$ , l'equazione precedente, considerando la sfera con centro in  $P$  molto piccola, diviene:

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_R \frac{1}{r} \nabla^2 U dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_\sigma U \frac{\partial 1}{\partial nr} dS. \quad (2.8)$$

che è la terza identità di Green.

Quando  $U$  diviene una funzione armonica allora l'equazione precedente diviene:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial 1}{\partial nr} \right] dS. \quad (2.9)$$

Questo importante risultato mostra che è possibile calcolare una funzione armonica in qualsiasi punto di una regione semplicemente dai valori della funzione e delle sue derivate normali sul confine della regione.

Questa equazione è chiamata formula di rappresentazione di Strauss. La terza identità di Green dimostra un'importante limitazione che deve affrontare qualsiasi interpretazione di un campo potenziale misurato in termini di sorgenti casuali: il potenziale all'interno di una qualsiasi sotto regione di  $R$  può essere correlato a



un'infinita varietà di distribuzioni superficiali. Quindi, non esistono condizioni al contorno univoche per una data funzione armonica.

## 2.1.4 Gli effetti della gravità su una massa puntuale

Sia dato un sistema coordinate cartesiane  $(x, y, z)$ , la forza  $F$  può allora essere espressa come  $F = +\partial\Phi/\partial r$  o  $F = -\partial\Phi/\partial r$  rispettivamente opposto o in direzione del vettore 3D di spostamento, con  $\Phi$  corrispondente al potenziale nel punto di osservazione  $(x, y, z)$ . Il gradiente positivo del potenziale  $U$  cioè  $F + \partial U/\partial r$  risulta utile per i campi gravitazionali in cui le particelle di segno simile si attraggono l'una all'altra e il potenziale  $U$  è uguale al lavoro svolto dal campo. Il gradiente  $\nabla\Phi$  del potenziale è un vettore che rappresenta il tasso di variazione spaziale massimo in una direzione normale alla superficie equi-potenziale. Tuttavia,  $F$  è un campo vettoriale conservativo tale che il suo determinante ottenuto dal prodotto vettoriale  $\nabla \times F = 0$ .

Affinché ciò accada, le differenze tra i tensori che compaiono nello sviluppo del determinante della matrice devono essere nulle. Ciò significa che tre dei sei tensori che compaiono nel calcolo sono ridondanti. Inoltre, la divergenza di  $F$  data da  $\nabla \cdot F$  corrisponde all'equazione di Laplace in cui un tensore è ridondante. Quanto sopra ci permette di giungere alla conclusione che solo cinque componenti vettoriali costituenti i relativi tensori del gradiente di  $F$  sono unici. Questa conclusione ci conduce ad una considerazione fondamentale per i campi potenziali, perché mostrano che la forza  $F$ , per un determinato problema, può essere ottenuta prendendo in considerazione la derivata spaziale dello scalare.

In pratica, la quantità di lavoro impiegato passando da due posizioni date, da  $r_1$  a  $r_2$  o viceversa, non dipende dal percorso congiungente i due punti del campo potenziale.

L'immediata conseguenza di questa conclusione è che intorno a qualsiasi percorso chiuso avremo

$$\oint F \cdot dr = 0$$

(2.10)

quindi il potenziale scalare potrà essere espresso da:

$$\phi = \pm \int F \cdot \partial r = \pm \int (F_x \partial_x + F_y \partial_y + F_z \partial_z) \quad (2.11)$$

Qualsiasi proprietà di ordine inferiore o superiore potrà essere determinata attraverso operazioni di derivazione dell'uno o dell'altro perché le derivate dell'argomento  $(1/r)$  sono linearmente correlate secondo questa relazione:

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \left( \frac{1}{r^k} \right) = \frac{(-1)^n}{r^{k+n}} \times \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} \quad (2.12)$$

La modellazione degli effetti di un campo gravitazionale su un corpo esteso (composto di infinite sorgenti puntiformi) prevede la somma di tutti gli effetti relativi alla singola sorgente puntiforme, nel punto di osservazione dato.

La figura che segue illustra il concetto di potenziale gravitazionale  $U$ , in presenza di un campo gravitazionale  $F_g$ , per effetto di una massa  $m$ .

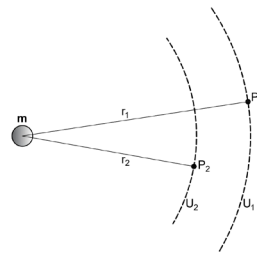


Figura 3 - Distribuzione spaziale dei punti  $P_1$  e  $P_2$  alla distanza  $r_1$  e  $r_2$  da una massa  $m$ , utilizzati nel calcolo dei potenziali  $U_1$  e  $U_2$

Le linee tratteggiate rappresentano le sezioni trasversali delle superfici equipotenziali che circondano la singola massa.

Il potenziale può essere valutato integrando la forza gravitazionale tra due punti alle distanze  $r_1$  e  $r_2$  usando la forma finita dell'equazione seguente data da:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} F_g \cdot \partial r \quad (2.13)$$

Tuttavia il potenziale non è determinato completamente a causa della costante di integrazione dell'integrale di cui all'equazione (2.13). Considerando che  $F_g$  per una massa unitaria  $m$  ad una distanza  $r$  vale:

$$F_g = -G \frac{m}{r^2} \quad (2.14)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale. Tenendo conto della legge di Newton, la differenza di potenziale, per  $r_2$  che all'infinito determina  $U(r_2) = 0$ , vale più genericamente:

$$U(r) = G \frac{m}{r} = G \int \frac{\partial m}{r} \quad (2.15)$$

La componente principale della gravità misurata dai gravimetri e utilizzata nella maggior parte delle analisi di gravità è l'intensità  $F_z$  della forza per unità di massa nella direzione verticale, che in letteratura è spesso indicata dalla lettera  $g$ .

Prima che  $g$  diventasse misurabile con l'avvento dei gravimetri moderni a metà degli anni quaranta, nel sottosuolo l'esplorazione ricorreva principalmente a misurazioni dell'equilibrio di torsione del vettore di gravità e delle sue variazioni (componenti tensoriali). Queste laboriose indagini erano orientate in modo preciso ed erano sufficientemente accurate. Recenti progressi nella misurazione della gravità e nella realizzazione di strumentazioni e procedure hanno rinnovato l'interesse nell'utilità nel contributo della geologia delle componenti vettoriali e dei gradienti dei loro tensori. Le componenti del gradiente del tensore sono utili per migliorare l'identificazione e la risoluzione delle fonti anomale.

### 2.1.5 Gli effetti della gravità su un corpo esteso

L'equazione (2.15) è utile però solo per valutare gli effetti della gravità su una massa puntiforme. È chiaro che in geofisica si opera su corpi estesi di densità variabili. Questo comporta che la massa  $m$  dovrà essere presa in considerazione sotto il profilo della propria densità e delle componenti volumetriche in ogni direzione spaziale, ad esempio da un limite inferiore  $a$ , ad un limite superiore  $b$ .

Quindi, generalizzando:

$$U = U(x, y, z) = G \int_{z'_a}^{z'_b} \sigma \int_{y'_a}^{y'_b} \sigma \int_{x'_a}^{x'_b} \sigma \left\{ \frac{1}{r} \right\} (\partial x' \partial y' \partial z')$$

(2.16)

Tali integrali possono essere estesi ad ogni distribuzione spaziale di massa, spesso utilizzando simmetrie per approssimare forme di corpi più complesse.

Gli effetti della gravità di corpi idealizzati tridimensionali e bidimensionali sono determinabili attraverso il calcolo degli integrali di cui alla formula (2.16) imponendo determinate condizioni al contorno.

Una vasta letteratura fornisce i valori degli effetti della gravità per corpi variamente modellati attraverso equazioni che sono affette da errori dovuti alle limitate assunzioni di base. Tali equazioni furono variamente proposte fino agli anni '70 e il loro obiettivo principale era la determinazione del valore dell'anomalia CA ( $g$ ).

In generale gli effetti della gravità su un corpo esteso e variamente articolato vengono determinati suddividendo il corpo in sezioni (lamine) e sommando gli effetti di tutte le sezioni rispetto al punto di osservazione.

In questo modo il problema da tridimensionale diviene bidimensionale. Il metodo della linea di integrazione fu adottato sin dagli anni '60. Tuttavia, l'integrazione numerica risultava più facile con il metodo di quadratura Gaussiano.

Dalla relazione intercorrente tra campo e potenziale gravitazionale, utilizzando il teorema della divergenza si ottiene l'equazione di Poisson che ci permette di determinare il potenziale gravitazionale a partire dalla densità della distribuzione di massa  $\delta$ .

La risoluzione dell'equazione di Poisson non può prescindere dal corretto utilizzo di condizioni al contorno, cioè che il potenziale diventi nullo quando la distanza dalla massa diventi infinita.

Infatti, dall'equazione di Poisson, integrando membro a membro su un volume arbitrario  $\Omega$  contenente una massa  $M$  e applicando il teorema della Divergenza, si ottiene il teorema di Gauss che permette di determinare il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa  $S$  contenente una determinata massa  $M$ .

Tuttavia il teorema di Gauss mette in relazione in modo univoco l'integrale della fonte con la massa, ma non ci informa delle caratteristiche e della distribuzione della massa stessa. [3]

## 3. CAPITOLO 3 – METODI A CONFRONTO

### 3.1 Introduzione

Una volta completati i rilievi col metodo magnetico o gravitazionale, una volta elaborati i dati e rimosse in modo appropriato le anomalie, occorre interpretare gli output dei rilievi stessi.

Il problema che si pone è concettualmente semplice: stimare uno o più parametri della sorgente di gravità osservata o di campi magnetici, ivi comprese tutte le informazioni di natura geologica, geofisica, e altre informazioni indipendenti.

Le numerose tecniche di interpretazione possono essere suddivise in tre categorie: metodo diretto, metodo inverso, miglioramento e visualizzazione dei dati. (Figura 4 seguente).

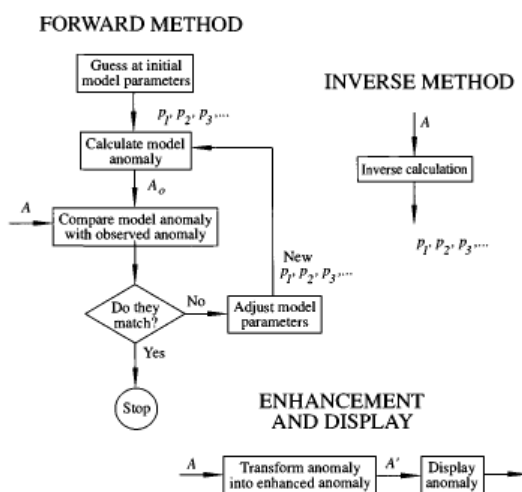


Figura 4 - Tre categorie di tecniche per interpretare i dati del campo potenziale. L'anomalia misurata è rappresentata da  $A$ , l'anomalia calcolata da  $A_o$ , e l'anomalia misurata e trasformata da  $A'$ . I parametri  $p_1, p_2, \dots$  sono attributi delle sorgenti, come per esempio la profondità, lo spessore, la densità, oppure la magnetizzazione

Ogni categoria ha lo stesso obiettivo, rendere visibile la distribuzione spaziale della gravità o delle sorgenti magnetiche, utilizzando strumenti e tecniche di acquisizione ed analisi di dati (fisica, matematica, informatica), minimizzando gli errori interpretativi, con l'utilizzo di processi logici molto diversi tra di loro, come meglio spiegato di seguito.

1. Metodo diretto: viene costruito un modello iniziale per il corpo di origine basato su ipotesi geologiche e geofisiche. L'anomalia del modello viene calcolata e

confrontata con l'anomalia osservata e i parametri del modello sono scelti al fine di migliorare l'adattamento tra le due anomalie. Questo processo di regolazione del corpo in tre fasi, calcolo delle anomalie, e il confronto delle anomalie viene ripetuto fino a quando non viene calcolato e le anomalie osservate vengono ritenute sufficientemente simili.

2. Metodo inverso: uno o più parametri del corpo vengono calcolati automaticamente e direttamente dall'anomalia osservata. Le semplificazioni delle ipotesi sono inevitabili.

3. Miglioramento e visualizzazione dei dati: non vengono calcolati parametri del modello fine a sé stessi, ma l'anomalia viene elaborata in qualche modo per migliorare determinate caratteristiche della sorgente, facilitando così l'interpretazione di insieme.

L'importanza di utilizzare tutte le informazioni acquisite disponibili nel processo interpretativo non può essere sottovalutata. La conoscenza dell'impostazione geologica e tettonica dovrebbe essere incorporata in ogni fase del processo.

La modellazione della sorgente può essere facilitata da rilievi sismici a riflessione o rifrazione, da studi precedenti del campo potenziale, o da altri tipi di informazioni geofisiche, più o meno disponibili.

L'interpretazione in ogni caso sarà intrinsecamente non univoca, ma l'acquisizione di informazioni indipendenti può ridurre l'insieme infinito di soluzioni matematiche ad una serie gestibile di modelli, ancora in numero infinito ma almeno più ragionevole dal punto di vista geologico.

Potrebbe sembrare dalla descrizione precedente che il metodo inverso sia notevolmente più semplice e diretto rispetto al metodo diretto.

Questo non è necessariamente vero. Alcuni modelli grossolanamente semplificati sono ancora necessari nel metodo inverso e l'inclusione di informazioni indipendenti potrebbe essere più difficile.

Il processo iterativo inerente al metodo diretto, invece, facilita l'introduzione di informazioni indipendenti nel processo interpretativo.

Nei paragrafi che seguono verranno trattati questi tre approcci per l'interpretazione della gravità e delle anomalie magnetiche.

Si tratterà in seguito dei vari modi per calcolare la gravità da modelli relativamente semplici, essenziali nel metodo diretto.

## **3.2 Modelli di gravità**

Le equazioni seguenti forniscono il potenziale gravitazionale  $U$  e il potenziale di attrazione  $g$  nel punto  $P$  a causa dell'attrazione di un volume di massa con densità  $\rho$ , cioè:

$$U(P) = \gamma \int_R \frac{\rho}{r} dv \quad (3.1)$$

$$\mathbf{g}(P) = \nabla(U) = -\gamma \int_R \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv \quad (3.2)$$

dove  $r$  è la distanza di  $P$  rispetto ad un elemento del corpo  $dv$ , e  $\gamma$  è la costante gravitazionale.

Gli strumenti misuratori di gravità misurano la componente dell'attrazione verticale della gravità (cioè, nella direzione di  $z$  crescente), qui indicata con  $g$  minuscola.

In coordinate cartesiane, si avrà perciò,

$$g(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(x', y', z') \frac{(z - z')}{r^3} dx' dy' dz' \quad (3.3)$$

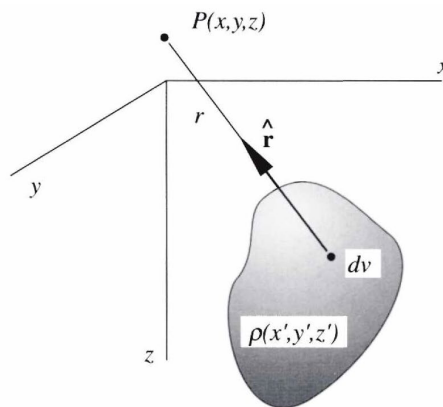


Figura 5 - Un corpo tridimensionale con densità  $\rho(x', y', z')$  e una forma arbitraria osservata dal punto  $P(x, y, z)$ . Vettore unitario dei punti  $\hat{\mathbf{r}}$  da un elemento della massa al punto  $P$

ove

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

L'equazione (3.3) ha la forma più generale seguente

$$g(x, y, z) = \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(x', y', z') \psi(x - x', y - y', z - z') dx' dy' dz'$$

(3.4)

dove

$$\psi(x, y, z) = -\gamma \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Si noti che  $\psi(x, y, z)$  è chiamata funzione di Green. Nell'equazione (3.4), la funzione di Green è semplicemente l'attrazione gravitazionale in  $(x, y, z)$  di una massa puntiforme situata in  $(x', y', z')$ .

Il metodo diretto richiede il calcolo ripetuto di  $g(x, y, z)$  utilizzando l'equazione (3.4), abbastanza semplice nel concetto ma non così semplice nella pratica. La difficoltà consiste nel cercare di approssimare formazioni geologiche complicate attraverso forme geometriche in cui le forme stesse sono sufficientemente semplici da rendere l'integrale di volume dell'equazione (3.4) suscettibile di poter essere calcolato automaticamente. Essenzialmente, si tratta di considerare sorgenti gravitazionali e la ipotetica sorgente suddivisa in  $N$  parti più semplici e convertire l'equazione (3.4) in qualcosa di simile alla relazione

$$g_m = \sum_{n=1}^N \rho_n \psi_{mn}$$

(3.5)

dove  $g_m$  è l'attrazione verticale nel punto di osservazione  $m$  (emmesimo),  $\rho_n$  è la densità della parte  $n$ , e  $\psi_{mn}$  è l'attrazione gravitazionale in un punto  $m$  dovuto alla parte  $n$  con densità unitaria.

### 3.3 Esempi tridimensionali – I prismi rettangolari

Una sequenza di prismi rettangolari fornisce un modo semplice per approssimare il volume di una determinata massa (figura 5). Se piccolo abbastanza, si può presumere che ogni prisma abbia una densità costante. Poi, per il principio di sovrapposizione



(paragrafo 3.2), l'anomalia gravitazionale del corpo in qualsiasi punto potrebbe essere approssimata sommando gli effetti di tutti i prismi, come descritto dall'equazione (3.5).

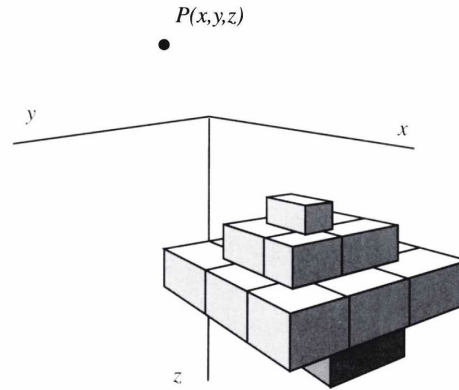


Figura 6 - Approssimazione di una massa tridimensionale secondo una serie-sequenza di prismi rettangolari

L'attrazione gravitazionale di un singolo prisma rettangolare si trova attraverso l'integrazione dell'equazione (3.4) lungo i limiti del prisma. Ad esempio, un prisma rettangolare con densità uniforme  $\rho$  e con dimensioni descritte dai limiti  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$  e  $z_1 \leq z \leq z_2$  ha una attrazione verticale all'origine data da

$$g = \gamma\rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} dx' dy' dz'$$

(3.6)

Spostando il punto di osservazione nell'origine si semplifica l'integrale: una semplificazione comune che si usa frequentemente. Plouff [4] fornì una derivazione dell'integrale precedente con il risultato di calcolare l'attrazione verticale per un prisma rettangolare con un codice scritto in Fortran.

#### **Una sequenza di lamine verticali**

Sebbene concettualmente semplice, l'approccio precedente sarebbe non praticabile. Le formazioni geologiche sono spesso difficili da modellare con blocchi rettangolari. Inoltre, il calcolo non ne trae vantaggio dal fatto che, se le densità dei prismi vicini sono identiche, non è necessario includere la loro interfaccia reciproca nel calcolo.

Un metodo più pratico venne successivamente descritto da Talwani ed Ewing [5]. La loro tecnica si avvicina alla modellazione di un corpo costituito da una pila di lamine infinitamente sottili. La forma di ciascuna lamina è approssimata da un

poligono (Figura 7) e i confini poligonali delle singole lamine sono rilevabili da mappe topografiche di contorno.

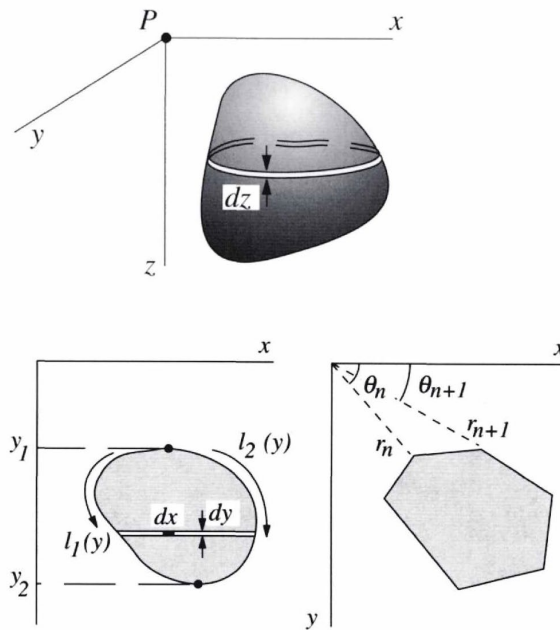


Figura 7 - Approssimazione di un corpo tridimensionale attraverso una sequenza di lamine, ciascuna approssimata ad un poligono bidimensionale

Quindi, il metodo viene spesso applicato al calcolo delle anomalie gravitazionali seguendo lineamenti topografici o batimetrici. Questo approccio ha condotto, per esempio, alla implementazione di una varietà di algoritmi informatici utili a facilitare la correzione degli effetti terrestri nelle misurazioni della gravità.

Si pone il punto di osservazione nell'origine del sistema di osservazione e si inizia nuovamente con l'equazione (3.4)

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) &= \gamma\rho \int_{z'} z' dz' \int_{y'} \int_{x'} \frac{dx' dy'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \gamma\rho \int_{z'} z' G(z') dz'
 \end{aligned}$$

(3.7)

ove

$$G(z') = \int_{y'} \int_{x'} \frac{dx' dy'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(3.8)

Le integrazioni su  $x'$  e  $y'$  rappresentano un'integrazione di superficie su un'unica lamina orizzontale del corpo. Alla fine, considereremo il corpo come una pila di lamine e sostituiremo l'integrazione su  $z'$  con una sommatoria; tuttavia dapprima consideriamo l'integrazione della superficie su una singola lamina.

Come mostrato nella figura 7, questa integrazione di superficie è equivalente a un'integrazione in due fasi attorno al perimetro della lamina. Per esempio, consideriamo l'integrazione di una funzione integranda  $f(x,y)$  su  $x$  e  $y$ . Con riferimento alla figura 7, l'integrazione su  $x$  produce un nuovo integrando  $F(x,y)$  con  $x$  valutata tra i limiti  $l_1$  e  $l_2$ .

I due integrali che si ottengono sono equivalenti all'integrazione in senso orario attorno al perimetro completo della lamina, che vale

$$\iint f(x,y) dx dy = \oint F(x,y) dy$$

Quindi, l'integrale doppio dell'equazione (3.7) diventa un integrale di linea attorno al perimetro della lamina,

$$G(z') = \oint \frac{x' dy'}{(y'^2 + z'^2) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

e sostituendo la fluida integrazione attorno al perimetro all'integrazione su  $M$  strati di segmenti rettilinei

$$G(z') = \sum_{m=1}^M \int_{y_m}^{y_{m+1}} \frac{x' dy'}{(y'^2 + z'^2) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

(3.9)

ove  $y_m$  e  $y_{m+1}$  sono le due coordinate finali del lato  $m$ .

La variabile  $x'$  può essere eliminata sostituendo nell'equazione (3.9) la seguente equazione del bordo lineare dritto

$$x' = \alpha_m y' + \beta_m$$

Dalle sostituzioni si ottiene in accordo con quanto ricavato da Grant e West [6]

$$G(z') = \sum_{m=1}^M \{\arctan \Omega_{m+1} - \arctan \Omega_m\}$$

(3.10)

ove  $\Omega$  indica la frontiera di ogni singola lamina.

Sebbene appaia poco immediata, l'equazione (3.10) può essere programmata per fornire facilmente  $G(z')$  per qualsiasi lamina; tutto ciò che è richiesto è la profondità  $z'$  e le coordinate  $x, y$  dei suoi  $M$  vertici.

Sostituendo l'equazione (3.10) nella (3.7) si ottiene l'attrazione verticale di una pila di lamine. L'integrazione su  $z'$  può essere fatta con tecniche di quadratura numerica (es. Press et al. [7]).

Se le anomalie sono causate da caratteristiche topografiche o batimetriche note, il metodo delle prove ripetute è notevolmente semplificato. Questo metodo è particolarmente potente in tali applicazioni perché le lamine poligonali possono essere costruite semplicemente digitalizzando i contorni su mappe topografiche o mappe batimetriche.

Nel metodo di Talwani e Ewing [5], la massa è approssimata da una pila di lamine infinitamente sottili.

Plouff [4] ha usato l'equazione (3.7) per derivare l'attrazione gravitazionale di uno strato di spessore finito, con lati verticali e con superfici superiore e inferiore approssimate da poligoni. Analogamente al metodo di Talwani e Ewing, questi strati poligonali possono essere impilati uno sopra l'altro per approssimare corpi di forma arbitraria tridimensionale.

Plouff ha usato il metodo per calcolare gli effetti gravitazionali del terreno e il metodo è stato implementato in vari programmi per rimuovere gli effetti del terreno dalle indagini gravitazionali.

### 3.4 Esempi bidimensionali

Le strutture geologiche sono spesso più allungate in senso longitudinale che in senso trasversale. Zone di frattura, faglie, dighe, zone di rift e anticlinali, ad esempio, sono spesso allineati in una particolare direzione orizzontale e la gravità o le anomalie magnetiche che producono sono allineate in modo simile (Figura 8).

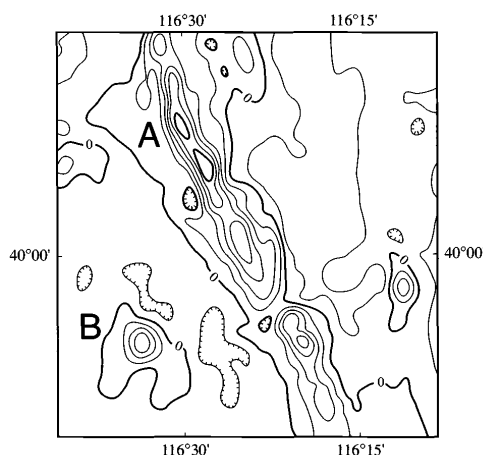


Figura 8 - Mappatura mostrante esempi di anomalie dovute a sorgenti bi e tridimensionali. I contorni rappresentano il campo totale di anomalia di un'area del centro – nord Nevada. A: anomalia bidimensionale; B: anomalia tridimensionale

Se le anomalie sono sufficientemente "lineari", può essere possibile considerare le sorgenti gravitazionali o magnetiche completamente invarianti nella direzione parallela alla direzione lungo la quale si sviluppano. L'asse y è diretto parallelamente alla direzione invariante lasciando solo le dimensioni x e z da considerare ulteriormente; il corpo allora si considera *bidimensionale*, e la densità, diventa

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, z).$$

Il concetto: “*Sufficientemente lineare*” è, ovviamente, un criterio piuttosto soggettivo. Peters [8], nel discutere un metodo per stimare la profondità delle sorgenti magnetiche, ha considerato un corpo come bidimensionale quando produce una anomalia chiusa dai contorni di forma approssimativamente ellittica, con dimensioni in lunghezza almeno tre volte maggiori delle loro dimensioni trasversali.

Grant e West [6], nel discutere le anomalie su sorgenti nastriformi, hanno suggerito che un nastro sepolto in modo superficiale deve essere almeno 20 volte più lungo della sua larghezza perché il presupposto di corpo bidimensionale sia legittimo.

Le sorgenti bidimensionali sono più facili da concettualizzare e, considerevolmente, più facili da modellare rispetto alle sorgenti tridimensionali; pertanto è un vantaggio usarle ogni volta che la situazione geologica lo consente.

Un fascio di cilindri paralleli costituirebbe un tipo semplice di modello bidimensionale. Quindi l'anomalia potrebbe essere approssimata con l'equazione

(3.5), dove in questo caso  $\psi_{mn}$  è l'attrazione nel punto  $m$  dovuta al cilindro  $n$  con densità unitaria.

Un modo più utile per approssimare le situazioni geologiche è sostituire la forma della sezione trasversale di corpi bidimensionali con poligoni semplificati.

Questo metodo deriva da un primo articolo di Hubbert [9], ma Talwani, Worzel e Landisman [10] hanno presentato per primi questo metodo in una maniera adeguata per l'adattamento ad algoritmi informatici. Questo metodo è, probabilmente, la tecnica più ampiamente utilizzata nell'interpretazione del campo del potenziale.

La seguente derivazione fornisce lo stesso risultato di Talwani et al. [10] in modo leggermente diverso, ma con molte somiglianze con le risultanze del paragrafo precedente.

L'equazione seguente fornisce il potenziale gravitazionale di un corpo bidimensionale con densità volumetrica  $\rho(x, z)$ :

$$U = 2\gamma \int_S \rho(S) \log \frac{1}{r} dS$$

ove l'integrazione è sulla superficie della sezione trasversale  $S$  e  $r$  è la distanza perpendicolare ad un elemento del corpo, condotta da un punto  $P(x, y, z)$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}$$

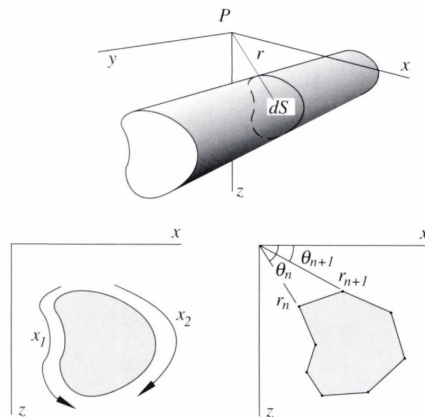


Figura 9 - Approssimazione di un corpo bidimensionale con un poligono formato da  $N$  lati

come rappresentato nella figura 9.

Per semplificare si sposta il punto di osservazione sull'origine, considerando la densità costante. L'attrazione verticale di gravità è data da

$$g(P) = \frac{\partial U}{\partial z} = 2\gamma\rho \iint \frac{z' dx' dz'}{x'^2 + z'^2}$$

e l'integrazione su  $x'$  diventa

$$g = 2\gamma\rho \int \left[ \arctan \frac{x'_2}{z'} - \arctan \frac{x'_1}{z'} \right] dz'$$

ove  $x'_1$  e  $x'_2$  sono entrambi funzioni di  $z'$  e, come mostrato dalla figura 9, rappresentano percorsi separati attorno ad una parte del perimetro della sezione trasversale della superficie. Questi due percorsi parziali, se presi insieme e considerato il cambio di segno, equivalgono ad un'unica integrazione in senso orario attorno al perimetro, cioè

$$g = 2\gamma\rho \oint \arctan \frac{x'}{z'} dz'$$

(3.11)

Se, ora, sostituiamo il perimetro liscio con un poligono costituito da  $N$  - lati, l'equazione (3.11) diventa

$$g = 2\gamma\rho \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \arctan \frac{x'}{z'} dz'$$

(3.12)

dove  $z_n$  e  $z_{n+1}$  sono le coordinate  $z$  dei due estremi del lato  $n$ .

Ora occorre un'espressione per  $x'$  in termini di  $z'$ , e questa è data dall'equazione di una retta:

$$x' = \alpha_n z' + \beta_n$$

(3.13)

Sostituendo l'espressione precedente dentro l'equazione (3.12) si ottiene l'equazione semplificata

$$g = 2\gamma\rho \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n}{1 + \alpha_n^2} \left[ \log \frac{r_n + 1}{r_n} - \alpha_n(\theta_{n+1} - \theta_n) \right]$$

(3.14)

nel caso in cui  $r_n$  e  $\theta_n$  siano definiti come mostrato in Figura 9.

L'attrazione gravitazionale del corpo bidimensionale, quindi, dipende dalla posizione degli  $N$  angoli del poligono. Se immaginiamo  $N$  linee tracciate dal punto di osservazione a ciascuno degli angoli del poligono, l'attrazione gravitazionale dipende dalle lunghezze di quelle linee e dagli angoli che formano con l'orizzontale (Figura 9).

A rigore di logica, la discussione precedente si applica ai corpi che sono infinitamente estesi lungo un asse orizzontale.

## 3.5 Gravity and Steady - State Ocean Circulation

### Explorer GOCE - Il satellite GOCE

GOCE è l'acronimo di Gravity Ocean Steady-state Circulation Explorer. La missione Earth Explorer GOCE dell'ESA è stata dedicata alla mappatura della gravità terrestre con una precisione senza rivali e ha fornito il modello più accurato del "geoide" mai prodotto per approfondire la nostra comprensione della superficie terrestre. Dopo più di quattro anni in orbita, la missione si è conclusa l'11 novembre 2013, ma la ricchezza di dati del GOCE continua a essere sfruttata per migliorare la comprensione della circolazione oceanica, del livello del mare, della dinamica dei ghiacci, dell'interno della Terra e dei cambiamenti climatici, ma soprattutto per acquisire dati sulle anomalie gravimetriche della Terra.

GOCE è stato lanciato il 17 marzo 2009. È il primo satellite del Programma Living Planet, che è il programma scientifico dell'ESA in materia di scienze della Terra. Le altezze del geoide GOCE consentiranno la conversione delle altezze GPS in altezze ad alta precisione al di sopra il livello del mare.

Il sofisticato gradiometro a bordo del satellite, (strumento costituito da tre coppie di accelerometri), ha permesso la misurazione delle differenze di accelerazione di gravità. GOCE orbitava attorno alla Terra oscillando rispetto ad una traiettoria ellissoidica, a causa delle variazioni laterali di densità del pianeta.

La geodesia satellitare ebbe inizio subito dopo il lancio dello Sputnik nel 1957. Le osservazioni effettuate dal satellite Vanguard 1 nel 1958 permisero un'accurata



misurazione dello schiacciamento dei poli. Nel 1960 furono lanciati il satellite Transit-1B, per la determinazione della posizione mediante effetto Doppler, che permise la misura delle componenti armoniche del campo gravitazionale terrestre. Il primo satellite dedicato alla geodesia fu ANNA-1B, lanciato nel 1962, frutto di una collaborazione tra la NASA, il Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti e altre agenzie civili. Tra il 1960 e il 1966 furono lanciati i satelliti-pallone ECHO 1, ECHO 2, e PAGEOS (PASSive Geodetic Earth Orbiting Satellite).

Tra il 1968 e il 1978 l'Unione Sovietica lanciò la serie di 18 satelliti militari per geodesia SFERA, con lo scopo di studiare la deriva dei continenti e migliorare i sistemi di localizzazione.

La gravimetria satellitare è iniziata con lo studio delle deviazioni dell'orbita dei primi moduli nelle missioni Apollo dovuta a variazioni di massa sotto la superficie della Luna (mascon) che ne alteravano il percorso teorico. Un'interpretazione di tali anomalie è riconducibile alla presenza di mari di lava basaltica sulla superficie lunare, similmente alle grandi province ignee sulla Terra, dette Large Igneous Provinces (LIPs).

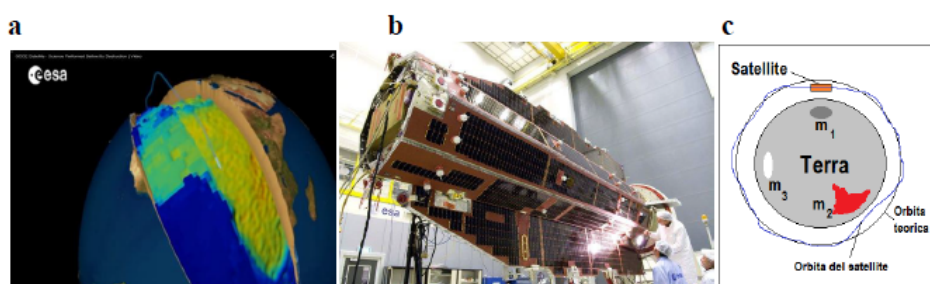


Figura 10 - a) Immagine illustrante la variazione dell'orbita del satellite (fonte ESA); b) controllo dei pannelli solari prima del lancio (fonte ESA); c) schema con le ondulazioni del satellite dovute a tre masse perturbanti

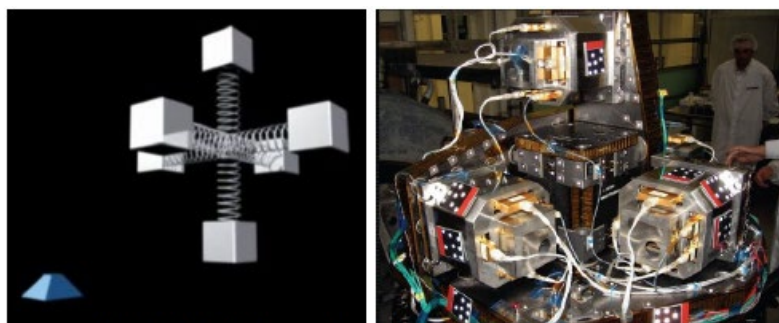
Nella figura 9 si può osservare l'ondulazione della traccia del satellite riconducibile a variazioni di densità. L'innovazione di GOCE è stata proprio quella di misurare con elevata precisione queste variazioni. Il fenomeno che permette la misura indiretta delle variazioni di densità della Terra è l'ondulazione dell'intero satellite lungo la sua orbita. Il progetto fu selezionato dall'European Space Agency (ESA) nel 1999 e la sua missione era di acquisire dati sulle anomalie gravimetriche della Terra.

GOCE ha acquisito dati gradiometrici per più di quattro anni su un'orbita quasi circolare e quasi polare alla più bassa quota possibile, attorno a 260 km, impiegando ca. 90 minuti per ogni rivoluzione completa. Le quote dei precedenti satelliti erano più alte. Per la missione GRACE, ad esempio, il satellite orbita a circa 450 km con una

risoluzione orizzontale di 160 km. Nell'ultima parte della missione l'orbita di GOCE è stata gradualmente abbassata fino a 220 km acquisendo dati via via più precisi a causa della minore quota.

I nuovi dati GOCE consentono di realizzare modelli globali con una precisione mai raggiunta prima. GOCE passerà alla storia per esser stato anche il primo sismografo in orbita (ESA, 2013). GOCE ha infatti registrato le onde prodotte dal terremoto di Tohoku dell'11/03/2011 propagatesi fino alla quota del satellite. La risoluzione orizzontale dei modelli basati sui dati GOCE è di 80 Km. GOCE ha misurato il geoide della Terra con un'accuratezza centimetrica su scala globale.

Il gradiometro gravitazionale elettrostatico era disposto secondo una terna di assi cartesiani ortogonali. Il sistema della servo-sospensione elettrostatica automatica consente il controllo delle grandezze traslazionali e rotazionali delle masse di prova. Le tre coppie di accelerometri identici formano le tre braccia del gradiometro che è montato su una struttura altamente stabile. La differenza tra l'accelerazione misurata da un accelerometro e quella misurata dall'accelerometro accoppiato lungo la direzione che unisce i due sensori, posti ad una distanza di ca. 50 cm contiene l'informazione gradiometrica di base fornita dallo strumento.



*Figura 11 - Gradiometro a bordo di GOCE (fonte ESA)*

Il gradiometro a bordo del satellite GOCE era costituito da 6 accelerometri capacitivi ubicati lungo tre assi mutualmente ortogonali. Il gradiometro poteva operare in due modalità: common mode (CM) e differential mode (DM). Le accelerazioni misurate in CM sono quelle non-gravitazionali impresse al satellite per manovrare la traiettoria, mentre quelle DM sono impiegate per calcolare i gradienti gravitazionali noti come Satellite Gravity Gradients (SGG).

La missione si è avvalsa di due sistemi di rilevamento della gravità complementari.

Le variazioni spaziali su larga scala del campo gravitazionale terrestre sono state derivate dalla sua orbita, mentre le variazioni su scale inferiori sono state misurate da

un cosiddetto gradiometro gravitazionale. Lo scopo della gradiometria gravitazionale è la misura delle derivate seconde del potenziale gravitazionale.

Il gradiometro GOCE è uno strumento triassiale e le sue misurazioni si basano sul principio dell'accelerometria differenziale. Si compone di tre coppie di accelerometri a tre assi montati ortogonalmente. Le direzioni delle coordinate dello strumento in volo sono la direzione (x), la direzione trasversale (y) e la direzione radiale (z).

La base di ciascun asse del gradiometro è pari a 50 cm. La precisione di ciascun accelerometro è  $10^{-12}$  m/s<sup>2</sup> su radice quadrata di Hz lungo due assi. Infatti, il rumore a bassa frequenza dovuto agli effetti di trascinamento a lungo termine, il cosiddetto rumore di accelerazione, viene contenuto nell'ordine di misura di  $10^{-12}$  m/s<sup>2</sup>/√Hz, nella gamma mHz. Tali valori sono di 5 ordini di grandezza inferiori a quelli minimi richiesti come requisiti di base dalla missione gradiometrica GOCE. Il terzo asse ha una sensibilità molto minore a causa della necessaria calibrazione pre-lancio a terra. Dalle differenze di accelerazione gravitazionale misurate, i tre termini diagonali principali e un termine fuori diagonale del tensore gravitazionale possono essere determinati con alta precisione.

L'elevatissima resa gradiometrica dello strumento è limitata alla cosiddetta larghezza di banda di misura (MBW). Il principio gradiometrico basato sull'accelerometria differenziale vale solo se tutti e sei gli accelerometri (tre coppie) sono gemelli perfetti e se tutte le masse di prova dell'accelerometro sono perfettamente allineate. Nel mondo reale piccole deviazioni da una tale idealizzazione sono inevitabili. Quindi, la calibrazione del gradiometro è della massima importanza.

Il segnale gradiometrico è sovrapposto agli effetti della velocità angolare e dell'accelerazione angolare del satellite nello spazio. La conoscenza di quest'ultima è richiesta per il controllo angolare e per la rimozione degli effetti angolari dai dati del gradiometro. La separazione dell'accelerazione angolare dal segnale gradiometrico è possibile grazie a una specifica combinazione delle differenze tra le accelerazioni misurate.

Al fine di prevenire la presenza di forze non gravitazionali, in particolare la resistenza atmosferica, che agisce sulla navicella spaziale con effetti secondari, il satellite viene mantenuto in direzione lungo una specie di *binario* (orbita) per mezzo di una coppia di propulsori ionici.

Il segnale di controllo necessario è ottenuto dalle accelerazioni (common mode), somma lungo i tre assi ortogonali delle coppie di accelerometri del gradiometro. Qualche contributo gradiometrico e angolare residuo si aggiungerà alla misura

dell'accelerazione in *common mode*. Questo è il risultato dell'imperfetta simmetria del gradiometro rispetto al centro di massa del veicolo spaziale e deve essere modellata.

Il secondo sensore di gravità è un dispositivo ricevitore GPS europeo di nuova concezione. Dalle sue misurazioni, l'orbita e la traiettoria sono calcolate geometricamente con scarti di pochi centimetri - una cosiddetta orbita cinematica - o con il metodo della determinazione dell'orbita dinamica ridotta.

Poiché il veicolo spaziale è tenuto in una modalità quasi *senza trascinamento* (almeno nella direzione lungo l'orbita) il movimento lungo l'orbita può essere considerato puramente gravitazionale.

L'altitudine dell'orbita è estremamente bassa, circa 265 km. Questo è essenziale per un'elevata sensibilità gravitazionale. Mai un satellite scientifico è volato a così bassa quota. La sua altitudine è mantenuta attraverso il controllo senza trascinamento e senza ulteriori manovre in orbita, che vengono effettuate a intervalli regolari.

Di contro, l'altitudine molto bassa si riflette sulle elevate esigenze di controllo dell'assetto e della resistenza.

Infine, qualsiasi segnale di gravità variabile del veicolo spaziale stesso deve essere escluso. Ciò si traduce in requisiti estremamente severi su rigidità metrica e controllo termico.

In sintesi, GOCE è una missione tecnologicamente molto complessa e innovativa. Il sistema del sensore del campo gravitazionale è costituito da un gradiometro gravitazionale e da un ricevitore GPS come strumenti fondamentali.

Gli elementi del sistema sono sintetizzati nella figura seguente [11].

(approximate orientation of the instrument triad: x = along track, y = out-of-orbit-plane, z = radial)

Sensor	Measurements
3-axes gravity gradiometer	Gravity gradients $\Gamma_{xx}$ , $\Gamma_{yy}$ , $\Gamma_{zz}$ , $\Gamma_{xz}$ in instrument system and in MBW (measurement bandwidth) Angular accelerations (highly accurate around y-axis, less accurate around x-, z-axis) Common mode accelerations
Star sensors	High rate and high precision inertial orientation
GPS receiver	Orbit trajectory with cm-precision
Drag control with 2 ion thrusters	Based on common mode accelerations from gradiometer and GPS orbit
Angular control with magnetic torquers	Based on angular rates from star sensors and gradiometer
Orbit altitude maintenance	Based on GPS orbit
Internal calibration (and quadratic factors removal) of gradiometer	Calibration signal from random shaking by cold gas thrusters (and electronic proof mass shaking)

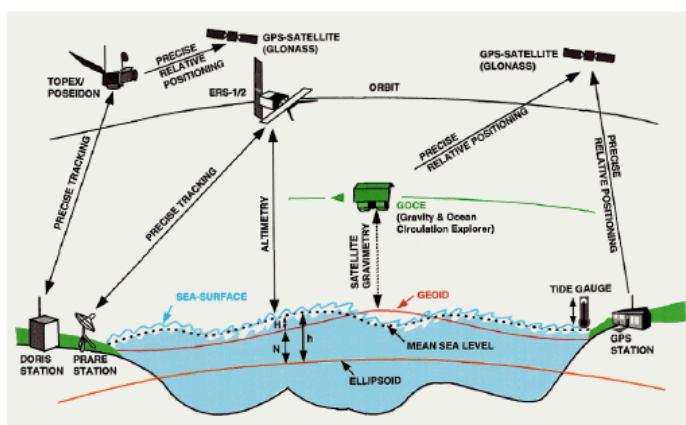
Figura 12 - Parametri essenziali degli elementi del sistema GOCE

I dati forniti dal satellite GOCE sono utilizzati per: migliorare i modelli climatici; contribuire a migliorare la comprensione della distribuzione del magma sotto i vulcani; fissare un unico sistema di riferimento per la misura delle quote sulla Terra; produrre

un riferimento della superficie del mare; stimare lo spessore e la massa del ghiaccio della calotta polare.

L'obiettivo principale di GOCE è quello di determinare il campo stazionario di gravità.

L'accuratezza dei dati è di 3 mgal alla massima risoluzione; il geoid misurato da GOCE ha un'accuratezza di 1-2 cm e 80 km di risoluzione spaziale. La rilevazione della posizione avveniva tramite GPS, GLONASS ed IGS (stazioni terrestri permanenti) con un errore centimetrico in 3D nel posizionamento.



$N$  = Geoid Height (Geoid – Ellipsoid);  $H$  = Sea-Surface Topography (Mean Sea Level – Geoid);  $h = H + N$ : Sea-Surface Height (Mean Sea Level – Ellipsoid). Immagine odificata da [http://cct.gfy.ku.dk/publ\\_cct/cct1721.htm](http://cct.gfy.ku.dk/publ_cct/cct1721.htm)

Figura 13 - Immagine schematica del funzionamento di GOCE

## **4. CAPITOLO 4 - GLI EFFETTI GRAVITAZIONALI DOVUTI A DETERMINATE DISTRIBUZIONI DI MASSE: IL PROBLEMA DELLA MODELLAZIONE IDEALE DI UN CORPO**

### **4.1 La modellazione delle sorgenti di gravità idealizzate**

Gli effetti della gravità di corpi idealizzati tridimensionali e bidimensionali sono determinabili attraverso il calcolo di integrali imponendo determinate condizioni al contorno.

In generale gli effetti della gravità su un corpo esteso e variamente articolato vengono determinati suddividendo il corpo in sezioni (lamine) e sommando gli effetti di tutte le sezioni rispetto al punto di osservazione.

Le sorgenti idealizzate 2D e 3D sono state ampiamente modellate utilizzando, rispettivamente, lamine verticali e pile verticali di lamine orizzontali che attraversano un corpo dalla forma irregolare. In entrambi i casi, la lamina è approssimata da un poligono con bordi lineari il cui effetto gravitazionale coinvolge completamente gli elementi geometrici descritti dalle coordinate del punto finale dell'elemento di linea.

La sorgente allungata di lunghezza finita è ampiamente utilizzata per la modellazione interattiva del vettore gravitazionale e dei componenti dei tensori vettoriali.

La legge di Gauss e le equazioni di Laplace e Poisson sono utili per comprendere la natura dei campi.

## 4.2 Nuove espressioni del Potenziale Gravitazionale e delle sue derivate per sorgenti di forma prismatica.

La modellazione delle sorgenti di gravità nella forma di corpi prismatici per la determinazione degli effetti gravitazionali dovuti a una determinata distribuzione di massa ha assunto da sempre un ruolo importantissimo soprattutto laddove è sufficientemente applicabile l'approssimazione della cosiddetta “*flat-Earth*”.

Tuttavia, le espressioni analitiche formulate in passato da diversi autori generano singolarità quando il calcolo del potenziale viene determinato in corrispondenza degli spigoli del prisma. Una situazione simile si verifica allorquando siamo dinanzi a corpi di forma poliedrica.

Recenti formulazioni sono state elaborate [12] per il calcolo del potenziale e del suo gradiente nel caso in cui il punto di osservazione P coincida con un vertice del corpo prismatico. Le formule ottenute, grazie all'applicazione del teorema di Gauss, mostrano come considerare nel modo più pertinente le singolarità senza ricorrere ad aggiustamenti posticci.

Il risultato è stato ottenuto trasformando degli integrali di volume, il ben noto integrale di Newton:

$$U(P) = G\delta \int_{\Omega} \frac{1}{(r \cdot r)^{1/2}} dV \quad (4. 1)$$

come somma di integrali di superfici estesi a ciascuna delle facce del prisma, quindi, esprimendo ciascuno degli integrali di superficie come somma di integrali lineari estesi agli spigoli di ciascuna delle facce generiche del prisma. L'approccio è basato sulla cosiddetta “*teoria della distribuzione*” che permette di individuare e infine risolvere le singolarità grazie ad una doppia applicazione del teorema di Gauss.

Il potenziale potrà così essere calcolato attraverso una prima applicazione del teorema di Gauss, trasformando l'integrale di volume in una sommatoria di integrali di superfici attraverso la relazione:

$$U(P) = \frac{G\delta}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i)^{1/2}} = \frac{G\delta}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\underline{\rho}_i \cdot \underline{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} \quad (4. 2)$$

In questa relazione [13], detto  $\underline{n}$  il versore della normale uscente in un punto generico della frontiera  $F_i(\Omega)$ ,  $N_F$  è il numero delle facce del poliedro,  $\underline{\rho}_i$  il vettore posizione 2D della  $i$ -esima faccia rispetto a  $P_i$  (proiezione del punto  $P$  sulla faccia) e  $d_i = \underline{r}_i \cdot \underline{n}_i$ .

Se si applica una seconda volta il teorema di Gauss, ogni integrale di superficie potrà essere trasformato in un integrale di linea attraverso la seguente relazione [13]:

$$U(P) = \frac{G\delta}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i(F_i)} \left( \underline{\rho}_i \cdot \underline{\rho}_i + d_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\underline{\rho}_i}{\left( \underline{\rho}_i \cdot \underline{\rho}_i \right)} \cdot \underline{v}_i dS_i - |d_i| \alpha_i \quad (4.3)$$

dove  $\underline{v}_i$  è il versore 2D della normale in un generico punto della frontiera della faccia  $i$ -esima e l'ultimo termine rappresenta la cosiddetta funzione di Dirac,  $|d_i| \alpha_i$ , correzione della singolarità.

Le relazioni (4.2) e (4.3) possono essere applicate a qualunque corpo di forma poliedrica e, nel caso specifico, ad un corpo di forma prismatica.

### 4.3 Nuove espressioni del Potenziale Gravitazionale per sorgenti di forma poliedrica.

Le formule appena sopra riportate sono state oggetto di applicazioni computazionali per il calcolo degli effetti gravitazionali per un corpo di forma poliedrica [14]. L'ipotesi alla base delle applicazioni è quella secondo la quale il generico spigolo del corpo di forma poliedrica non contenga l'origine del sistema di riferimento locale della generica faccia del poliedro. In questa ipotesi gli integrali daranno risultati che non conterranno singolarità.

Le applicazioni numeriche implementate in Matlab® hanno confermato le ipotesi dell'autore.



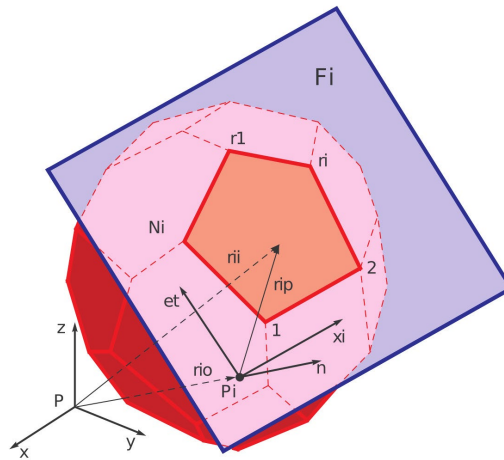


Figura 14 - Quadro di riferimento bidimensionale di un corpo poliedrico

## 4.4 Gli effetti gravitazionali di corpi poliedrici con densità variabile linearmente

L'approccio utilizzato per il calcolo degli effetti gravitazionali dei corpi poliedrici con densità uniforme può essere esteso al caso di corpi con densità variabile linearmente, valutando attentamente le relative singolarità.

Il poliedro a densità costante è stato più volte ripetutamente analizzato. Tuttavia l'ipotesi della densità costante è poco realistica. [15]

Basterà considerare il fatto che, per esempio, un bacino sedimentario ha subito nel corso della sua evoluzione geologica una compattazione, per cui la densità in generale aumenta con la profondità.

Questa considerazione ha spinto diversi autori a studiare gli effetti gravitazionali prodotti su corpi che hanno una densità variabile linearmente in due o tre dimensioni.

Il grado di complessità delle analisi si è spinto fino all'esame di modellazioni di densità variabili anche esponenzialmente.

Peraltro, dalle variazioni di densità in senso verticale, nella direzione della profondità, diversi autori hanno iniziato a considerare distribuzioni di densità più complesse sia in senso verticale che orizzontale.

Il problema della modellazione dei corpi è divenuta di fondamentale importanza, sicché dalla modellazione di corpi in forma prismatica si è passati a modellazioni di corpi in forma poliedrica.

Lo studio degli effetti gravitazionali si è pertanto esteso al caso di corpi di forma poliedrica con densità variabile linearmente considerando le singolarità rilevanti che emergono di volta in volta.

In particolare, formule analitiche per il potenziale gravitazionale e per le relative derivate del primo e del secondo ordine sono state ricavate [13] come somme di grandezze rappresentate da integrali unidimensionali che si estendono al generico bordo del poliedro. Inoltre sfruttando la teoria della distribuzione [16], le singolarità nel calcolo degli effetti gravitazionali sono state calcolate in modo esatto indipendentemente dalla posizione del punto di osservazione.

Lo stesso approccio è stato applicato in D'Urso e Marmo [17], a problemi di geomeccanica e a un problema di geofisica.

In [14], le formule analitiche per il calcolo degli effetti gravitazionali dei corpi poliedrici con densità variabile linearmente sono state espresse come funzioni esplicite delle coordinate dei vertici delle relative facce, ovvero con i dati geometrici di base utilizzati per definire il corpo poliedrico. L'autore ha dimostrato che, con questo metodo, solo le derivate seconde del potenziale possono presentare singolarità e questo accade se e solo se il punto di osservazione è allineato con uno dei bordi del poliedro.

### **4.4.1 Il potenziale gravitazionale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente.**

Consideriamo un dominio arbitrario limitato, la cui distribuzione di massa continua abbia una densità  $\delta(s)$  variabile linearmente in funzione del vettore posizione  $s$  di un punto arbitrario appartenente ad esso. Quindi  $\delta(s) = \delta_0 + \mathbf{g} \cdot s$ ; dove  $\delta_0$  è una densità di riferimento costante valutata all'origine  $O$  di un sistema di riferimento cartesiano  $(O, x, y, z)$  tridimensionale, in cui sono assegnate le coordinate di  $s$ ; per di più, il vettore  $\mathbf{g}$  rappresenta il gradiente della legge lineare  $\delta(s)$ .

Il potenziale gravitazionale, avendo indicato con  $p$  il vettore posizione di un punto arbitrario  $P$ , potrà essere espresso come:

$$U(P) = U_{(p)} = G \int_{\Omega} \frac{\delta(s)}{[(p - s) \cdot (p - s)]^{1/2}} dV_{(s)}$$

(4.4)

dove  $G$  è la costante gravitazionale. Sostituendo nella (4.4) l'espressione della densità variabile linearmente, appena sopra introdotta, si ottiene:

Capitolo 4 - Gli effetti gravitazionali dovuti a determinate distribuzioni di masse: il problema della modellazione ideale di un corpo

$$U(P) = G(\delta_0 + g \cdot p)U_c P + Gg \int_{\Omega} \frac{s}{\|p - s\|} dV_{(s)}$$

(4. 5)

ovvero, ponendo  $r = s - p$ , si ottiene in modo equivalente:

$$U(P) = G(\delta_0 + g \cdot p)U_c P + Gg \int_{\Omega} \frac{r}{(r \cdot r)^{1/2}} dV$$

(4. 6)

dove con  $U_c$  è stato indicato il potenziale relativo ad un corpo con densità costante.

Nella (4.6) è interessante la valutazione dell'integrale che vi compare poiché è la quantità che riesce a connotare il caso del potenziale di corpi poliedrici con densità variabile linearmente.

L'integrale che compare alla fine della (4.6) è già stato valutato in letteratura ad esempio da Pohànka [18] e altri. Tuttavia in nessuna delle trattazioni è stato menzionato il caso della singolarità in  $r = 0$  e se questo influisca sul risultato finale.

In [19], con l'uso di identità differenziali, l'integrale su  $\Omega$  relativo ad un poliedro caratterizzato da  $N_f$  facce viene determinato come di seguito:

$$U_l = \int_{\Omega} \frac{r}{(r \cdot r)^{1/2}} dV = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_f} \{d_i^2 [I_{F_i} - |d_i| \alpha_i] + d_i \mathbf{T} F_i k F_i\}$$

(4. 7)

con le indicazioni riportate in [13], [14].

D'altra parte [13] è stato già provato che:

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_f} d_i \{I_{F_i} - |d_i| \alpha_i\}$$

(4. 8)

### 4.4.2 Derivate del primo ordine del potenziale gravitazionale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente.

La derivata del primo ordine del potenziale gravitazionale è data dall'espressione:

$$d_p U(P) = G \left\{ -(\delta_0 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{p}) \sum_{i=1}^{N_F} (I_{F_i} - |d_i| \alpha_i) \mathbf{n}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i F_{F_i} \mathbf{g} \right\} \quad (4.9)$$

La peculiarità di questa espressione consiste nel fatto che essa dipende solo dalle coordinate tridimensionali dei vertici del poliedro ed è provato che non genera singolarità, evitando in tal modo l'introduzione di piccoli coefficienti correttivi ammessi da alcuni autori in altre espressioni al fine di evitare operazioni indefinite.

### 4.4.3 Derivate del secondo ordine del potenziale gravitazionale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente.

Il tensore gravitazionale, cioè il gradiente di secondo ordine del potenziale in P è ottenuto differenziando l'espressione della derivata del primo ordine (4.9), ottenendo, attraverso opportune sostituzioni l'espressione:

$$d_p (Ag) = - \sum_{i=1}^{N_F} [F_{F_i} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}_i)] \quad (4.10)$$

L'integrale che compare nell'espressione di  $F_{F_i}$  è indefinito quando il punto di osservazione P è allineato con uno qualsiasi dei bordi della faccia  $F_i$ .

La derivata seconda del potenziale di un corpo poliedrico con densità variabile linearmente mostra lo stesso tipo di singolarità che caratterizza la densità costante.

Tuttavia, a differenza di quest'ultimo caso in cui i termini singolari erano confinati alle voci fuori diagonale, la singolarità ora può influenzare tutte le voci della matrice associate alla derivata seconda.

## 5. CAPITOLO 5 - LE ANOMALIE GRAVITAZIONALI

### 5.1 Anomalia gravitazionale di un corpo 2D

È estremamente vantaggioso disporre di soluzioni analitiche dell'anomalia gravitazionale associata ad un corpo caratterizzato da complesse distribuzioni di densità. Tuttavia, data la complessità matematica del problema, l'anomalia gravitazionale di un corpo irregolare, il cui contrasto di densità è spazialmente variabile, è stata dapprima calcolata approssimando il corpo come un insieme di parallelepipedi rettangolari verticali (prismi) in cui si presume che la densità sia costante. Quindi, l'anomalia gravitazionale per l'intero corpo è calcolata come somma algebrica del contributo di tutti i prismi verticali a profondità appropriate e delle distanze dal punto di osservazione. I calcoli e i riscontri numerici sono stati effettuati per la prima volta da Talwani et al. (1959) e Bott (1960). Le espressioni in forma chiusa dell'anomalia gravitazionale furono successivamente derivate da Nagy (1966), Banerjee e DasGupta (1977), Cady (1980), Nagy et al. (2000), Tsoulis (2000), Jiancheng e Wenbin (2010), D'Urso (2012), Plouff (1975, 1976), Won e Bevis (1987), Montana et al. (1992) per i codici informatici.

Il caso di un guscio sferoidale è stato affrontato da Johnson e Litehiser (1972). Espressioni analitiche delle anomalie di gravità per prismi sono state derivate da D'Urso (2015); per una densità linearmente variabile, da Rao (1985, 1986, 1990), Rao et al. (1994), e Gallardo-Delgado et al. (2003); per contrasti quadratici di densità, da Garcí'a-Abdeslem (1992, 2005), quando la densità varia con profondità secondo una legge cubica.

I modelli di contrasto di densità non polinomiali sono stati considerati da Cordell (1973), Chai e Hinze (1988), Litinsky (1989), Silva et al. (2006), e Chappell e Kusznir (2008).

Le forme più complicate del contrasto di densità sono state studiate, ad esempio, da Cai e Wang (2005) e Mostafa (2008).

I contributi appena menzionati sono caratterizzati da una semplice modellazione geometrica, ovvero l'uso di prismi, e da una raffinata modellazione del contrasto di densità.

Un approccio diverso è basato invece sull'uso dei poliedri, per evitare la necessità di suddividere la regione di interesse in diversi prismi, controbilanciati da una semplice descrizione del contrasto di densità.

Alla stesura di formule analitiche dell'analisi gravimetrica dei poliedri a densità costante hanno contribuito di Paul (1974), Barnett (1976), Strakhov (1978), Okabe (1979), Waldvogel (1979), Golizdra (1981), Strakhov et al. (1986), Go'tze e Lahmeyer (1988), Pohanka (1988), Murthy et al. (1989), Kwok (1991b), Werner (1994), Holstein e Ketteridge (1996), Petrovic' (1996), Werner e Scheeres (1997), Li e Chouteau (1998), Tsoulis (2012) e D'Urso (2013).

Studi di approfondimento successivi si sono occupati solo di variazione lineare della densità (Pohanka 1998; Hansen 1999; Holstein 2003; Hamayun et al. 2009; D'Urso 2014). Utilizzando funzioni di densità più complesse con modelli poliedrici si aumentano notevolmente le difficoltà del trattamento, soprattutto se si cercano soluzioni analitiche.

L'interesse nella modellazione di dati di gravità con l'uso di densità non uniforme è legato alla rilevanza geologica ed economica dei bacini sedimentari. Lo spessore del sedimento e la topografia del substrato roccioso sono parametri importanti nella modellazione del flusso delle acque sotterranee, nell'esplorazione del petrolio, nelle indagini geotettoniche e nell'amplificazione del movimento del suolo durante un terremoto (Jacoby e Smilde 2009; Aydemir et al. 2014).

La valutazione geologica dei bacini sedimentari è piuttosto complessa per cui il tipo di funzione che descrive il contrasto di densità è significativamente diversa da caso a caso.

Ad esempio, se si assume che la compattazione differenziale semplice sia il principale processo diagenetico nella valutazione di un bacino sedimentario, risultati geologicamente significativi sono ottenuti utilizzando una densità esponenzialmente crescente con la profondità.

Tuttavia, più entrano in gioco processi geologici complessi, come stratificazioni non uniformi e cambiamenti di facies, più occorrerà tener conto di variazioni più generali di densità.

Indipendentemente dal tipo di funzione assunta per definire il contrasto di densità, in generale si può presumere che la densità vari, separatamente o congiuntamente, lungo le direzioni verticale e orizzontale.

Ad esempio, le variazioni di densità possono essere arbitrarie in direzione orizzontale e di tipo polinomiale in quello verticale, o viceversa.

Questo ultimo caso si verifica nell'immersione di intrusioni stratificate o letti sedimentari in cui una funzione di densità data è assunta lungo la profondità e una funzione di densità polinomiale è considerata nella direzione orizzontale.

Inoltre, complesse funzioni di densità possono essere associate a modellazioni 3D basate su prismi (Murthy e Rao 1979; Rao et al. 1990; Chakravarthi et al. 2002; Chakravarthi e Sundararajan 2007; Zhou 2009), o con forme geometriche 2D (Gendzwill 1970; Murthy e Rao 1979; Pan 1989; Guspí 1990; Ruotoistenmäki 1992; Martí'n-Atienza e García-Abdeslem 1999; Zhang et al. 2001; Zhou 2008, 2009, 2010).

In realtà, quest'ultima ipotesi geometrica, che caratterizza i domini aventi una forma cilindrica, semplifica notevolmente la trattazione matematica del problema.

La derivazione delle espressioni analitiche per l'anomalia gravitazionale non è ancora stata raggiunta, anche in presenza di domini bidimensionali, per corpi caratterizzati da contrasto di densità complicato, per cui si è fatto ricorso a metodi numerici.

Nello specifico, a partire dalle prime ricerche sull'argomento (Hubbert 1948), tutti gli autori hanno trasformato sistematicamente gli integrali del dominio originale in integrali di dimensione inferiore al fine di semplificare l'adozione di regole di quadratura per la valutazione numerica dell'anomalia gravitazionale.

Per i corpi 2D, Zhou [20] nel 2008 ha convertito l'integrale del dominio originale per l'anomalia gravitazionale in un integrale di linea (LI) usando il teorema di Stokes.

In particolare, ha derivato due tipi di LI per il calcolo dell'anomalia gravitazionale di corpi aventi contrasto di densità dipendente solo dalla profondità. In un articolo successivo del 2009 [21], Zhou estese il suo metodo per tenere conto delle funzioni di contrasto di densità che dipendevano non solo dalla profondità ma anche in senso orizzontale o, congiuntamente, in senso orizzontale e verticale.

L'approccio originale di Zhou è stato ulteriormente migliorato in Zhou [22] (nel 2010) per valutare l'anomalia gravitazionale da punti di osservazione diversi dall'origine poiché, storicamente, si calcolava l'anomalia gravitazionale solo all'origine del sistema di riferimento.

Inoltre, Zhou si è occupato della singolarità dell'anomalia gravitazionale che si verifica laddove il punto di osservazione coincide con i vertici del dominio di integrazione, un problema già discusso in Kwok [23] (nel 1991), per la modellazione basata su prismi, e Tsoulis e Petrovic' [24] (nel 2001) per i poliedri.

Un'espressione analitica dell'anomalia gravitazionale per corpi poligonali il cui contrasto di densità è espresso come una funzione polinomiale di grado arbitrario in entrambe le direzioni orizzontale e verticale è stata recentemente ottenuta riducendo l'integrale del dominio originario in un integrale al bordo in virtù del teorema di Gauss generalizzato e successivamente applicato a diversi problemi dalla geodesia [25][19][26][27] alla geomeccanica [17], alla geofisica, e al trasferimento di calore [28].

Il teorema di Gauss generalizzato permette non solo di derivare un'espressione dell'anomalia della gravità che si esprime in termini di integrale al contorno ma anche di dimostrare che la singolarità dell'anomalia gravitazionale, che sorge quando il punto di osservazione appartiene al dominio di integrazione, è eliminabile.

Per un dominio poligonale di  $n$  lati, l'espressione dell'anomalia gravitazionale in termini di integrale al contorno è ulteriormente perfezionata nella somma di un certo numero  $n$  di integrali 1D.

Diversamente dai precedenti contributi sull'argomento, tali integrali 1D non sono valutati numericamente ma espressi analiticamente in funzione dei vettori posizione definenti i vertici del dominio di integrazione e di grandezze scalari  $I_{ki}$  definite su ciascun lato.

A loro volta, le quantità  $I_{ki}$ , relative all' $i$ -esimo spigolo del confine sono calcolate analiticamente valutando un integrale di variabile reale che può esibire una singolarità quando il bordo appartiene ad una linea contenente il punto di osservazione.

Tuttavia, è dimostrato che tale singolarità produce un contributo nullo dell' $i$ -esimo bordo all'espressione generale dell'anomalia gravitazionale. Quindi, si può concludere che l'espressione derivata è priva di singolarità.

Sfruttando un opportuno cambio di variabili, si ricava anche una formula algebrica avanzata che esprime l'anomalia di gravità in un punto arbitrario  $P$  e si semplifica al caso ordinario quando  $P = O$ .

La formula ottenuta è stata implementata in un codice Matlab e la sua accuratezza e robustezza sono state valutate mediante confronti numerici con esempi tratti dalla letteratura.

### **5.1.1 L'anomalia gravitazionale di un corpo 2D all'origine $O$ del piano di riferimento**

La gravitazione esercitata da un corpo tridimensionale  $\hat{\Omega}$  su una unità di massa in  $O$  è data da:



$$\mathbf{g}(O) = G \int_{\widehat{\Omega}} \frac{\Delta\rho(\mathbf{r})\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.1)$$

Dove  $G$  è la costante gravitazionale,  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione che parte da  $O$  e finisce in un generico punto di  $\widehat{\Omega}$  e  $\Delta\rho(\mathbf{r})$  è il contrasto di densità in  $\mathbf{r}$ . Il prodotto tra  $\Delta\rho(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r})$  rappresenta la differenza infinitesimale tra la massa in  $\mathbf{r}$  e la rimanente parte della massa volumica. L'interesse risiede nel problema bidimensionale, come indicato nella figura n. 15, in cui si indica con  $\Omega$  la sezione di  $\widehat{\Omega}$ .

La componente verticale  $g_z(O)$  è data dalla formula:

$$g_z(O) = G \int_{\widehat{\Omega}} \frac{\Delta\rho(\mathbf{r})\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.2)$$

in cui  $\mathbf{k}$  è il vettore unitario diretto verso il basso.

Considerando che  $\widehat{\Omega}$  è infinito nella direzione  $y$ , l'integrazione può essere effettuata tra due ordinate  $\pm d_y$ , con  $d_y \rightarrow \infty$ , ottenendo:

$$g_z(O, O) = G \int_{\Omega} \frac{\Delta\rho(x, y)z}{x^2 + z^2} dA \quad (5.3)$$

Questa è la forma generale dell'integrale 2D per il calcolo dell'anomalia gravitazionale in  $O$  prodotta da una distribuzione di masse 2D aventi un contrasto di densità  $\Delta\rho$  rispetto al resto. In realtà, l'anomalia gravitazionale è definita come l'integrale di linea dei componenti della gravitazione vettoriale 2D lungo il confine della massa di un corpo.

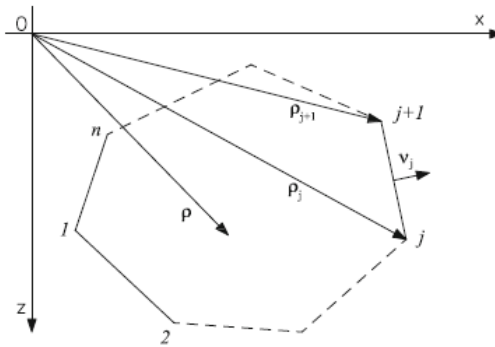


Figura 15 - Dominio poligonale ed entità geometriche del bordo iesimo

L'integrazione della (5.3) è piuttosto complessa per il fatto che la distribuzione del contrasto di densità in  $\Omega$  può essere arbitraria, e ciò è dovuto ai processi geologici e geochimici.

Per questa ragione un'espressione abbastanza generica per  $\Delta\rho$ , in grado di contemplare una larga varietà di formazioni geologiche, è data da un doppio polinomio in  $x$  e  $z$  [29][30][21][20][31]:

$$\Delta\rho(x, y) = \theta(x, z) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_z} c_{ij} x^i z^j \quad (5.4)$$

dove  $N_x$  e  $N_z$  rappresentano la massima potenza della variazione di densità polinomiale rispettivamente lungo  $x$  e  $z$ .

Gli scalari  $c_{ij}$  rappresentano i coefficienti della legge polinomiale. Essi possono essere stimati dai punti dati e noti mediante un approccio dei minimi quadrati (Jacoby e Smilde 2009)[32].

In [27] la trattazione viene generalizzata al caso  $N_x+N_z = 3$ , facilmente generalizzabile al caso di  $N_x+N_z > 3$ . de

Per semplificare gli sviluppi successivi è stato introdotto il vettore bidimensionale  $\rho = (x, z)$  e  $K_z(0,1)$ . In tal modo la (5.3) è stata riscritta come:

$$g_z(o) = 2G \int_{\Omega} \frac{\theta(\rho)(\rho \cdot K_z)}{\rho \cdot \rho} dA \quad (5.5)$$

dimostrando che l'integrale precedente può essere espresso come integrale di linea esteso al confine  $\partial\Omega$  di  $\Omega$ .

Quindi è stata riscritta la (5.4), cioè l'espressione generale della densità di contrasto, utilizzando tensori del secondo ordine e del terzo ordine:

$$\theta(\rho) = \theta_0 + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\rho} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{\rho\rho} + \mathbb{C} \cdot \mathbb{D}_{\rho\rho\rho} \quad (5.6)$$

giungendo all'espressione:

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{o}) = 2G[\theta_0 d_\rho^\Omega + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}_\rho^\Omega + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{\rho\rho}^\Omega + \mathbb{C} \cdot \mathbb{D}_{\rho\rho\rho}^\Omega] \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Espressioni analitica e algebrica dell'anomalia di gravità in $\mathbf{O}$ in termini di integrali al contorno.

Al fine di ricavare un'espressione algebrica utile per la programmazione con codici tipo Matlab [27], l'espressione analitica:

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{o}) = 2G \left[ \theta_0 d_\rho^{\triangleleft\Omega} + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}_\rho^{\triangleleft\Omega}}{2} + \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{\rho\rho}^{\triangleleft\Omega}}{3} + \frac{\mathbb{C} \cdot \mathbb{D}_{\rho\rho\rho}^{\triangleleft\Omega}}{4} \right] \quad (5.8)$$

è stata perfezionata al caso di un dominio poligonale  $\Omega$ , approssimabili anche a poligoni con numero arbitrario di vertici.

La formula ottenuta è priva di singolarità nel senso che per spigoli del dominio caratterizzati da singolarità dell'integrale che ivi compare, l'intero addendo è pari a 0, si veda la formula 56 in [27].

### 5.1.3 L'anomalia gravitazionale di un corpo 2D in un punto arbitrario $\mathbf{P}$

Un altro argomento affrontato di recente da X. Zhou [29] è quello del calcolo dell'anomalia gravitazionale in un punto di osservazione che non coincide con l'origine del sistema di riferimento. Nello specifico X. Zhou ha ideato due formulazioni alternative: la prima, denominata *trasformazione di coordinate*, che è stata concepita in modo da fare del punto di osservazione l'origine del nuovo sistema di coordinate impiegando la soluzione ottenuta dall'autore stesso e da Zhang [31].

L'approccio richiede di esprimere il contrasto di densità in funzione delle nuove coordinate. Nella seconda formulazione proposta da Zhou [29], denominata *soluzione trasformazione*, la soluzione in un punto arbitrario viene estrapolata da quella ottenuta all'origine del sistema di riferimento.

L'autore [27] ha invece indicato con  $\omega = (x_p, z_p)$  il vettore posizione di un punto arbitrario P, mostrando che si può ben utilizzare l'approccio del paragrafo precedente, così come la funzione che esprime il contrasto di densità, purché si introduca il vettore  $\rho = \sigma - \omega$ , per definire la posizione relativa del generico punto  $\sigma = (x, z)$  di  $\Omega$  rispetto a P.

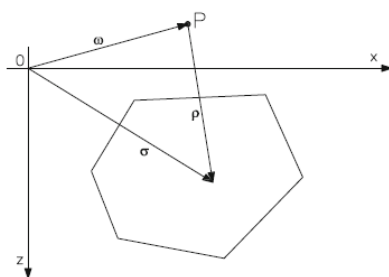


Figura 16 - Rappresentazione della simbologia usata per assegnare la densità di contrasto  $\sigma$  e definire la posizione di  $\Omega$  rispetto ad un punto arbitrario P

Si ottengono: l'espressione analitica dell'anomalia gravitazionale ottenuta in un punto arbitrario P in termini di integrale al contorno; l'espressione algebrica dell'anomalia gravitazionale in un punto arbitrario P; la valutazione del tensore del terzo ordine.

È stato dimostrato che l'espressione analitica (5.8) è priva di singolarità, nel senso che la sua espressione si conserva rigorosamente qualunque sia la posizione del punto O rispetto a X. La stessa proprietà vale nel caso in cui venga introdotto il vettore  $\rho$  e nel caso delle espressioni algebriche dell'anomalia gravitazionale [27].

Le formule illustrate nelle sezioni precedenti sono state codificate dall'autore in un programma Matlab per verificarne la correttezza e la robustezza. Sono stati applicati a "test modelli" casi di studio derivati dalla letteratura specializzata. In particolare, il

contrasto di densità si è ipotizzato che vari separatamente lungo le direzioni orizzontale e verticale o lungo entrambi. In tutti gli esempi, il contrasto di densità è stato espresso in unità grammi per centimetro cubo, mentre le distanze sono state espresse in chilometri; il valore della costante gravitazionale  $G$  è stato assunto essere pari a  $6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

## **5.2 L'anomalia gravitazionale di corpi poliedrici con variazione di densità polinomiale**

In questo paragrafo viene approfondito il tema dell'anomalia gravitazionale associata ad un corpo poliedrico avente una forma geometrica arbitraria e un contrasto di densità polinomiale sia in direzione orizzontale che in direzione verticale. L'anomalia gravitazionale viene valutata in un punto arbitrario che non coincide necessariamente con l'origine del sistema di riferimento in cui la funzione di densità è assegnata.

Si assume che il contrasto di densità sia al massimo un polinomio del terzo ordine, ma l'approccio generale può essere facilmente esteso a funzioni polinomiali di ordini superiori. La gravità è uno strumento economico per esplorare e scoprire le risorse naturali. A questo proposito, la densità è una delle proprietà fisiche più diagnosticate di un giacimento minerario ed è anche fondamentale per l'esplorazione di petrolio e gas. Ad oggi la densità è stata una delle proprietà più difficili da misurare e dedurre.

È di fondamentale importanza valutare in modo efficiente l'anomalia gravitazionale associata ad un corpo caratterizzato da complesse distribuzioni di densità poiché ciò rappresenta un compito importante nella modellazione.

A causa della complessità matematica del problema, l'anomalia gravitazionale di un corpo irregolare il cui contrasto di densità è spazialmente variabile è stato dapprima calcolato approssimando il corpo come un insieme di parallelepipedi rettangolari verticali (prismi) in cui si suppone che la densità sia costante.

In alternativa all'uso dei prismi, caratterizzati da complicate funzioni che descrivono il contrasto di densità, sono stati introdotti dei poliedri dotati di una semplice descrizione del contrasto di densità.

Successivamente i progressi hanno riguardato solo la variazione lineare della densità. Introducendo e trattando funzioni di densità più complesse in combinazione con modelli poliedrici, aumentano considerevolmente le difficoltà della trattazione, soprattutto se si cercano soluzioni analitiche.

Per corpi 2D con contrasto di densità che dipende solo dalla profondità, Zhou [22] ha convertito l'integrale del dominio originale per l'anomalia gravitazionale in un integrale di linea (LI) utilizzando il teorema di Stokes. In particolare, ha derivato due tipi di LI per il calcolo dell'anomalia gravitazionale di corpi. In un articolo successivo, Zhou [33] ha esteso il suo metodo per rendere conto di funzioni di contrasto di densità che dipendevano non solo dalla profondità ma anche dalla variazione orizzontale o, congiuntamente, in direzione orizzontale e verticale.

L'anomalia gravitazionale nei punti di osservazione diversi dall'origine è stata ulteriormente valutata da Zhou [31], poiché storicamente l'anomalia gravitazionale è stata calcolata solo nell'origine del sistema di riferimento. Nello stesso articolo, Zhou ha affrontato la singolarità dell'anomalia gravitazionale che si verifica quando il punto di osservazione coincide con i vertici del dominio di integrazione, problema già discusso da altri autori.

Un primo approccio per valutare l'anomalia gravitazionale di corpi caratterizzati da un contrasto di densità complicato, anche in presenza di domini bidimensionali, è stato di natura numerica o semi-analitica, basato sull'uso di prismi o di forme geometriche 2D.

In realtà, quest'ultima ipotesi geometrica, che può essere utilizzata per modellare domini che si estendono verso l'infinito in una sola direzione, semplifica notevolmente la trattazione matematica del problema.

Altri autori hanno trasformato gli integrali di dominio originali in integrali di dimensioni inferiori per semplificare l'adozione di regole di quadratura numerica per la valutazione dell'anomalia gravitazionale.

La derivazione delle espressioni analitiche per il calcolo dell'anomalia gravitazionale dei corpi poligonali è stata raggiunta di recente da D'Urso [17], che ha sfruttato prima il teorema di Gauss generalizzato presentato in [13], applicandolo successivamente a diverse problematiche della geodesia [14] [21] [29].

La metodologia delineata in [27] è stata generalizzata al fine di ricavare un'espressione analitica dell'anomalia gravitazionale per corpi poliedrici aventi densità di contrasto espressa come una funzione polinomiale di grado arbitrario sia in direzione orizzontale che in direzione verticale, problema recentemente affrontato da Ren et al. [35]. Il risultato si ottiene per primo riducendo l'integrale del dominio originale a un integrale al contorno 2D, in virtù del teorema di Gauss generalizzato. Sorprendentemente, questo permette anche di dimostrare che l'espressione dell'integrale di confine dell'anomalia gravitazionale è esente da singolarità qualunque sia la posizione del punto di osservazione rispetto al corpo.

Trattandosi di un corpo poliedrico, l'espressione 2D dell'anomalia gravitazionale si scrive come somma finita di integrali 2D estesi alle facce dello stesso.

Con un'ulteriore applicazione del teorema di Gauss generalizzato, ogni integrale di faccia è ridotto alla somma degli integrali 1D estesi agli spigoli di ciascuna faccia. Tali integrali 1D sono valutati analiticamente come prodotti tra la posizione dei vettori dei vertici finali di ciascun bordo e dei coefficienti scalari che forniscono l'analisi del valore degli integrali di variabile reale.

Sebbene questi ultimi integrali possano esibire una singolarità quando la proiezione del punto di osservazione su una faccia appartiene a un bordo, è dimostrato che tale singolarità produce un contributo nullo dell'i-esimo arco all'espressione generale dell'anomalia gravitazionale. Se ne deduce che l'espressione derivata è priva di singolarità.

Sfruttando un opportuno cambio di variabili, si ricava anche una formula algebrica avanzata che esprime l'anomalia di gravità in un punto arbitrario P e si conforma alla situazione ordinaria quando  $P = O$ .

È di notevole riguardo e interesse il fatto che l'espressione migliorata dell'anomalia gravitazionale è stata derivata senza alcuna modifica della funzione di contrasto di densità. La formula potenziata è stata implementata in un codice Matlab e la sua accuratezza e robustezza sono state valutate mediante confronti numerici con esempi tratti dalla letteratura.

### 5.2.1 Anomalia di gravità dei corpi poliedrici all'origine O del sistema di riferimento

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano avente origine in un punto arbitrario O e un corpo poliedrico  $\Omega$ . Assumeremo che la densità  $\Delta$  del corpo, solitamente denominata contrasto di densità, è funzione del punto generico la cui posizione rispetto a O è definita dal vettore  $\mathbf{r}$ . Il simbolo  $\Delta\rho$  indica il fatto che la densità di  $\Omega$  è una variazione rispetto a quella del mezzo circostante.

Indicando con G la costante gravitazionale, l'anomalia gravitazionale in O è definita, come già indicato da:

$$\Delta\mathbf{g}(O) = G \int_{\Omega} \frac{\Delta\rho(\mathbf{r})\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \tag{5.9}$$

dove la funzione integranda rappresenta la grandezza dell'attrazione gravitazionale su un'unità di massa rispetto all'origine O derivante dalla massa infinitesimale  $\Delta\rho dV$ .

Notiamo che la denominazione di anomalia gravitazionale adottata per denotare l'equazione (5.9), sebbene non strettamente corretta, si basa su una pratica comune nella letteratura specializzata. In realtà, l'equazione (5.9) è una formula per l'attrazione gravitazionale di un corpo di una determinata massa e può essere approssimativamente considerata come la formula per l'influenza di un corpo di determinata massa sull'anomalia gravitazionale dal momento che, per i corpi di piccole dimensioni, l'effetto sulla gravità è la parte predominante dell'effetto sull'anomalia gravitazionale.

La componente verticale dell'anomalia gravitazionale in O è fornita dall'equazione (5.10):

$$\Delta g_z(O) = G \int_{\Omega} \frac{\Delta\rho(\mathbf{r})\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.10)$$

essendo  $\mathbf{k}$  il vettore unitario diretto lungo l'asse verticale. La valutazione di  $\Delta g_z$  in un punto P arbitrario è una espressione notevolmente elaborata.

Di solito è interessante disporre di una procedura per calcolare effettivamente  $\Delta g_z$  poiché la maggior parte dei gravimetri possono misurare solo la componente verticale del campo gravitazionale.

Il calcolo dell'integrale in (5.10) è un compito difficile poiché la funzione di contrasto di densità  $\Delta\rho$  di solito ha un'espressione molto complicata per la necessità di modellare le anomalie 3D della Terra. Per semplicità, questa può essere modellata come un insieme di anomalie 3D in un mezzo stratificato o una sequenza di strati con interfacce ondulate orizzontalmente, ad esempio bacini sedimentari e substrato roccioso sottostante. In ogni strato, la densità di massa mostra tipiche variazioni dipendenti dalla profondità.

Tuttavia, i processi geologici di natura esogenetica ed endogenetica possono indurre variazioni sia orizzontali che verticali della densità di massa.

Pertanto, un'espressione adeguata della variazione di densità può consentire potenzialmente rappresentazioni fedeli del sottosuolo terrestre con una quantità relativamente minore di calcoli e parametri.

Un'espressione abbastanza generale per  $\Delta\rho$ , in grado di rappresentare una grande varietà di formazioni geologiche, è data da un polinomio in  $x$ ,  $y$  e  $z$ , [33] e [30], dove



$N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  rappresentano la potenza massima della variazione di densità polinomiale rispettivamente lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = \theta(x, y, z) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} c_{ijk} x^i y^j z^k \quad (5.11)$$

La limitazione al caso  $N_x + N_y + N_z = 3$  è sufficiente per affrontare la maggior parte delle applicazioni pratiche e, allo stesso tempo, per essere generalizzata ai casi

$N_x + N_y + N_z > 3$ . In conclusione, dalla (5.10) si ricava la seguente espressione dell'anomalia gravitazionale

$$\Delta\mathbf{g}_z(\mathbf{o}) = G[\theta_0 d_r^\Omega + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}_r^\Omega + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{rr}^\Omega + \mathbb{C} \cdot \mathbb{D}_{rrr}^\Omega] \quad (5.12)$$

dove:

$$d_r^\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.13)$$

$$\mathbf{d}_r^\Omega = \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.14)$$

$$\mathbf{D}_{rr}^\Omega = \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.15)$$

$$\mathbb{D}_{rrr}^\Omega = \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.16)$$

Per trasformare i precedenti integrali di dominio in integrali al contorno, l'autore [13] [14] ha applicato il teorema di Gauss nella forma generalizzata in modo da tener conto correttamente della singolarità in  $\mathbf{r} = \mathbf{O} = (0, 0, 0)$ . Nell'espressione (5.12),  $\mathbf{c}$  è un vettore;  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_{rr}$  e  $\mathbb{D}_{rrr}$  sono rispettivamente tensori simmetrici del secondo e del

terzo ordine ( $\mathbf{D}_{rr} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ ;  $\mathbb{D}_{rrr} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ ),  $\theta_0$  è uno scalare che indica la densità in  $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ .

Gli integrali al contorno estesi alle facce di  $\Omega$  sono stati ulteriormente ridotti a integrali 1D estesi ai bordi di ciascuna faccia mediante un'ulteriore applicazione del teorema di Gauss.

Questi ultimi integrali saranno prima espressi in funzione delle coordinate 2D dei vertici nel sistema di riferimento locale di ciascuna faccia e poi riformulato in termini di coordinate 3D che rappresentano i dati geometrici di base che definiscono il poliedro.

## 5.2.2 Espressione analitica dell'anomalia gravitazionale in $\mathbf{O}$ in termini di integrali 2D

In D'Urso viene illustrato un approccio generale per esprimere gli integrali 3D in (4.7) come integrali 2D estesi alle facce che costituiscono il confine di  $\Omega$ . La generalità sta nel fatto che, per la simmetria degli integrali, l'applicazione del teorema di Gauss può basarsi su un'unica formula. Viene dimostrato infatti che si ottiene il risultato:

$$\int_{\Omega} \frac{k_r[\otimes \mathbf{r}, m]}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV = \frac{1}{m+1} \int_{\Omega} \frac{k_r[\otimes \mathbf{r}, m](\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dA \quad m = 0, 1, \dots \quad (5.17)$$

dove  $k_r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}$  è l'unità 3D verso l'esterno normale al confine del corpo poliedrico e  $[\otimes \mathbf{r}, m]$  denota un tensore di rango  $m$  opportunamente definito.

In conclusione, l'applicazione della (5.17) ci permette di riscrivere la (5.12) nel seguente formato:

$$\Delta \mathbf{g}_z(\mathbf{o}) = G \left[ \theta_0 d_r^{\partial \Omega} + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}_r^{\partial \Omega}}{2} + \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{rr}^{\partial \Omega}}{3} + \frac{\mathbb{C} \cdot \mathbb{D}_{rrr}^{\partial \Omega}}{4} \right] \quad (5.18)$$

Questa formula è utile per trasformare gli integrali 2D in integrali 1D.

### 5.2.3 Espressione analitica dell'anomalia di gravità in O in termini di integrali di ciascuna faccia del poliedro.

Nell'intento di ottenere un'espressione adatta alla programmazione in Matlab, è stata perfezionata la formula (5.18) per domini poliedrici, poiché trattasi di gran lunga del caso più generale trattato nei problemi di gravità inversi.

Per un corpo poliedrico caratterizzato da  $N_F$  facce, gli integrali contenuti in (5.13, 5.14, 5.15, 5.16) possono essere scritti come:

$$d_r^{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{3/2}} dA_i \quad (5.19)$$

$$\mathbf{d}_r^{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{k})\mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{3/2}} dA_i \quad (5.20)$$

$$\mathbf{D}_{rr}^{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{k})\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{3/2}} dA_i \quad (5.21)$$

$$\mathbb{D}_{rrr}^{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{k})\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{3/2}} dA_i \quad (5.22)$$

in cui il secondo termine in ciascuna formula di cui appena sopra deriva dal fatto che il vettore  $\mathbf{r}_i$  che copre la  $i$ -esima faccia, si veda ad esempio la Fig. 17, può essere scomposto come segue:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^\perp + \mathbf{r}_i^\parallel \quad (5.23)$$

cioè come somma di un vettore  $r_i^\perp$  ortogonale a  $F_i$  e di un vettore  $r_i^\parallel$  parallelo alla faccia.

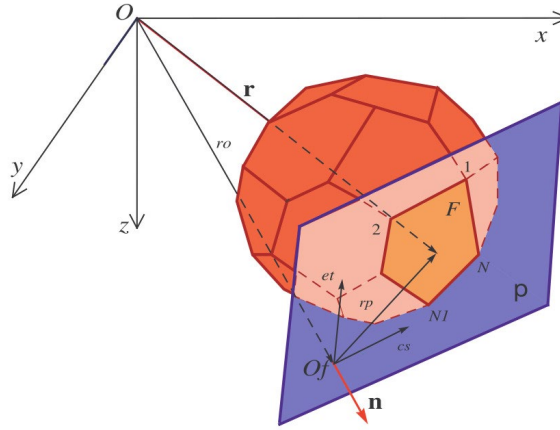


Figura 17 - Dominio del poliedro  $\Omega$  e decomposizione del vettore posizione di un punto sulla faccia

Di conseguenza, indicando con  $n_i$  il vettore unitario che punta verso l'esterno di  $\Omega$ , viene posto:

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i = r_i^\perp \cdot \mathbf{n}_i = d_i \quad (5.24)$$

in cui  $d_i$  rappresenta la distanza con segno tra l'origine e la faccia  $i$ -esima  $F_i$  misurata ortogonalmente a quest'ultima.

Gli integrali 2D sopra individuati possono essere trasformati in un integrale di linea mediante un'ulteriore applicazione del teorema di Gauss.

A tal fine si indica con  $O_i$  la proiezione ortogonale su  $F_i$  del punto di osservazione  $O$  e si assume  $O_i$  come origine di un sistema di riferimento 2D locale associato alla faccia.

Quindi si esprime la formula (5.24) nella forma alternativa:

$$\mathbf{r}_i = r_i^\perp + r_i^\parallel = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i + r_i^\parallel = d_i\mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i}\boldsymbol{\rho}_i \quad (5.25)$$

dove il vettore  $\boldsymbol{\rho}_i = (\xi_i; \eta_i)$  rappresenta il vettore posizione di un generico punto della  $i$ -esima faccia rispetto a  $O_i$  e:

$$\mathbf{T}_{F_i} = \begin{bmatrix} u_{i1} & v_{i1} \\ u_{i2} & v_{i2} \\ u_{i3} & v_{i3} \end{bmatrix}$$

(5.26)

è l'operatore lineare che mappa il vettore 2D  $\rho_i$  su quello 3D  $r_i^l$ .

Attraverso diverse integrazioni si perviene all'integrale relativo all'iesima faccia che viene valutato dall'autore come il prodotto tensoriale di vettori 2D:

$$\int_{F_i} \frac{[\otimes \rho_i, m]}{(\rho_i \cdot \rho_i + d_i^2)^{3/2}} dA_i \quad m \in [0, 4]$$

(5.27)

### 5.3 Espressione analitica di integrali di faccia in termini di integrali 1D

Lo scopo principale è il calcolo dell'integrale (5.27).

Secondo Tang [34] anche gli integrali (5.13, 5.14, 5.15, 5.16), possono essere trasformati in integrali 1D più semplici attraverso un'ulteriore applicazione del teorema di Gauss generalizzato.

Per alcuni di essi, cioè per i casi in cui  $m = 0$ ,  $m = 1$ ,  $m = 2$ , l'autore [13] [25] [19] ha già definito le soluzioni. In [35] vengono definiti i casi in cui  $m = 3$  e  $m = 4$ .

Il passaggio successivo operato dall'autore [35] è quello di calcolare gli integrali delle facce iesime in termini di vettori 2D, che rappresentano le coordinate dei vertici di ciascun spigolo nel sistema di riferimento locale di ciascuna faccia  $F_i$ .

L'autore [35] dimostra che le espressioni algebriche derivate e richiamate nel precedente paragrafo possono essere espresse in termini di vettori 3D per essere applicati nella formula (5.18).

Infine [35] vengono valutati i tensori del terzo ordine che compaiono in  $\mathbb{D}_{rrr}^{\partial\Omega}$ , prendendo anche in considerazione il fatto che devono prima essere espressi in termini di vettori 2D e solo successivamente riformulati in termini di vettori 3D.

### 5.4 Anomalia di gravità di corpi poliedrici in un punto arbitrario P

Quando le misure di gravità vengono eseguite in più punti e/o quando vengono presi in considerazione una molteplicità di corpi, è di gran lunga più conveniente fissare un

sistema di riferimento arbitrario in cui sia le coordinate di ciascun punto di osservazione che la densità di tutti i corpi vengono assegnati contemporaneamente.

In alternativa, si può seguire l'approccio delineato in D'Urso [27] e definire il vettore posizione  $\mathbf{r}$  entrando nella definizione dell'anomalia gravitazionale come segue  $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{p}$ , dove  $\mathbf{p}$  è il vettore posizione del punto di osservazione ed  $\mathbf{s}$  è il vettore posizione di un punto arbitrario appartenente a  $\Omega$ , vedi ad esempio la Fig. 16.

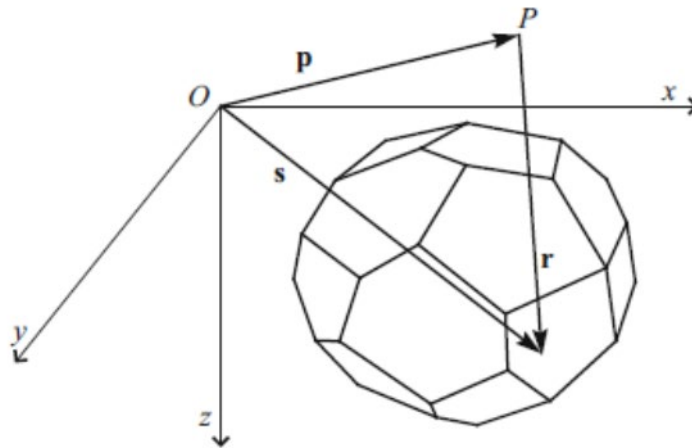


Figura 18 - Rappresentazione delle entità geometriche utilizzate per assegnare il contrasto di densità ( $\mathbf{s}$ ) e definire la posizione di  $\Omega$  rispetto ad un punto arbitrario  $P$

Con l'introduzione del vettore  $\mathbf{r}$  nella forma appena sopra indicata, richiamando la formula (5.2) nella forma con ( $\mathbf{s}$ ) al posto di ( $\mathbf{r}$ ), si ottiene:

$$\Delta \mathbf{g}_z(P) = G \int_{\Omega} \frac{\Delta \rho(\mathbf{s}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \quad (5.28)$$

che nel caso di molteplici punti di osservazione potrà essere scritta come:

$$\Delta \mathbf{g}_z(P_i) = G \sum_{j=1}^{N_B} \int_{\Omega_i} \frac{\Delta \rho(\mathbf{s}_j) \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j)^{3/2}} dV \quad (5.29)$$

in cui  $\Omega_j$  è il dominio del corpo  $j$ -esimo,  $N_B$  è il numero dei corpi da analizzare e i vettori posizione  $j$ -esimi individuano di volta in volta il vettore posizione dei punti  $P_i$  rispetto al sistema di riferimento assegnato avente origine in un punto arbitrario  $O$ .

Si perviene alla formula richiamata in [35] dall'autore (la numero 130) che coinciderà con la (5.18) quando  $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ .

# Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

Si riporta nel seguito la trattazione sviluppata in D'Urso M.G. e Di Lieto D., sottomesa alla rivista *Surveys in Geophysics*.

Il potenziale gravitazionale  $U$  è definito mediante un integrale triplo, integrale di Newton:

$$U(P) = G \int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{s})}{[\mathbf{p} - \mathbf{s}]^{1/2}} dV(\mathbf{s}) \quad \mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{p} \quad (6.1)$$

considerando un dominio limitato arbitrario, avente una distribuzione di massa continua, con densità  $\delta(\mathbf{s})$  definita mediante un polinomio di quarto grado, funzione del vettore posizione  $\mathbf{s} = (x, y, z)$ .

$$\delta(\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} c_{ijk} x^i y^j z^k \quad (6.2)$$

Dato un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale (3D)  $(O, x, y, z)$  avente origine in un punto  $O$ , si indica con  $\mathbf{p}$  il vettore di posizione di un punto arbitrario  $\mathbf{P}$  e con  $\mathbf{r}$ , il vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{p}$ .

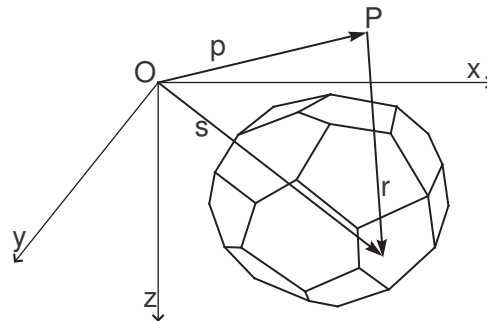


Figura 18 - Rappresentazione delle grandezze geometriche utilizzate per assegnare la densità in  $\mathbf{s}$  e definire la posizione di  $\Omega$  rispetto ad un punto arbitrario  $P$



Per valutare analiticamente gli effetti della gravità in forma chiusa, si applica il teorema di Gauss e si considerano i domini, rappresentati da forme poliedrali.

Si analizza inizialmente il caso in cui il punto  $P$  coincide con l'origine del sistema di riferimento assegnato, ovvero  $\mathbf{s} = \mathbf{r}$  con  $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ , ed infine, il caso generale con il vettore posizione  $\mathbf{p}$  in un punto arbitrario  $\mathbf{P}$

## 6.1 Potenziale nell'origine $O$ del sistema di riferimento $XYZ$

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano avente origine in un punto  $O$  e un corpo poliedrico  $\Omega$ . Assumiamo che la densità del corpo  $\delta(\mathbf{r})$  sia funzione del punto generico la cui posizione rispetto ad  $O$ , è definita dal vettore  $\mathbf{r}$ .

Denotando con  $G$  la costante gravitazionale, valutiamo il potenziale gravitazione rispetto ad  $O$ , definito come:

$$U(\mathbf{o}) = G \int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{r})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) \quad (6.3)$$

Il calcolo dell'integrale risulta complicato, in quanto la funzione di densità presenta un'espressione complessa, di seguito riportata:

$$\delta(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} c_{ijk} x^i y^j z^k \quad (6.4)$$

dove  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  rappresentano le potenze massime della densità polinomiale lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

L'equazione (6.4) si esplicita:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}) = & c_{000} + c_{100}x + c_{010}y + c_{001}z + c_{200}x^2 + c_{020}y^2 + c_{002}z^2 + c_{110}xy + c_{011}yz + c_{101}xz + \\ & + c_{300}x^3 + c_{030}y^3 + c_{003}z^3 + c_{210}x^2y + c_{021}y^2z + c_{102}xz^2 + c_{120}xy^2 + c_{012}yz^2 + \\ & + c_{201}x^2z + c_{111}xyz + c_{400}x^4 + c_{040}y^4 + c_{004}z^4 + c_{310}x^3y + c_{031}y^3z + c_{103}xz^3 + \\ & + c_{130}xy^3 + c_{013}yz^3 + c_{301}x^3z + c_{220}x^2y^2 + c_{022}y^2z^2 + c_{202}x^2z^2 + c_{211}x^2yz + \\ & + c_{121}xy^2z + c_{112}xyz^2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

in cui, gli scalari  $c_{ijk}$  rappresentano i coefficienti nella legge polinomiale e si stimano da punti noti mediante l'approccio dei minimi quadrati.

Possiamo riformulare l'espressione della densità come:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{o}} + \mathbf{c}^{(1)} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{C}^{(2)} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{rr}} + \mathbf{C}^{(3)} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{rrr}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{rrrr}} \quad (6.6)$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

dove:

- $\delta_o$  è uno scalare che denota la densità nel punto di coordinate  $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ ;
- $\mathbf{c}^{(1)}$  e  $\mathbf{r}$  rappresentano vettori:

$$\mathbf{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} c_{100} \\ c_{010} \\ c_{001} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (6.7)$$

- $\mathbf{C}^{(2)}$  e  $\mathbf{D}_{\mathbf{rr}}$  tensori del secondo ordine simmetrici:

$$\mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_{200} & c_{110}/2 & c_{101}/2 \\ c_{110}/2 & c_{020} & c_{011}/2 \\ c_{101}/2 & c_{011}/2 & c_{002} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

con  $\otimes$  si identifica il prodotto tensoriale.

- $\mathbf{C}^{(3)}$  e  $\mathbf{D}_{\mathbf{rrr}}$  tensori del terzo ordine simmetrici;

$$\mathbf{C}^{(3)} = \begin{bmatrix} C_{111}^{(3)} & C_{121}^{(3)} & C_{131}^{(3)} \\ C_{211}^{(3)} & C_{221}^{(3)} & C_{231}^{(3)} \\ C_{311}^{(3)} & C_{321}^{(3)} & C_{331}^{(3)} \\ C_{112}^{(3)} & C_{122}^{(3)} & C_{132}^{(3)} \\ C_{212}^{(3)} & C_{222}^{(3)} & C_{232}^{(3)} \\ C_{312}^{(3)} & C_{322}^{(3)} & C_{332}^{(3)} \\ C_{113}^{(3)} & C_{123}^{(3)} & C_{133}^{(3)} \\ C_{213}^{(3)} & C_{223}^{(3)} & C_{233}^{(3)} \\ C_{313}^{(3)} & C_{323}^{(3)} & C_{333}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{rrr}} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x^3 & x^2y & x^2z \\ yx^2 & xy^2 & xyz \\ zx^2 & xzy & xz^2 \\ x^2y & xy^2 & xzy \\ y^2x & y^3 & y^2z \\ zxy & zy^2 & z^2y \\ x^2z & xyz & xz^2 \\ yxz & y^2z & yz^2 \\ z^2x & z^2y & z^3 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

in cui le componenti in  $\mathbf{C}^{(3)}$  si rappresentano di seguito:

$$\begin{aligned} C_{111}^{(3)} &= c_{300} & C_{222}^{(3)} &= c_{030} & C_{333}^{(3)} &= c_{003} \\ C_{112}^{(3)} &= C_{121}^{(3)} = C_{211}^{(3)} = c_{210}/3 & C_{113}^{(3)} &= C_{131}^{(3)} = C_{311}^{(3)} = c_{201}/3 \\ C_{223}^{(3)} &= C_{232}^{(3)} = C_{322}^{(3)} = c_{021}/3 & C_{122}^{(3)} &= C_{221}^{(3)} = C_{212}^{(3)} = c_{120}/3 \\ C_{133}^{(3)} &= C_{331}^{(3)} = C_{313}^{(3)} = c_{102}/3 & C_{233}^{(3)} &= C_{332}^{(3)} = C_{323}^{(3)} = c_{012}/3 \\ C_{123}^{(3)} &= C_{132}^{(3)} = C_{213}^{(3)} = C_{231}^{(3)} = C_{312}^{(3)} = C_{321}^{(3)} = c_{111}/6. \end{aligned} \quad (6.10)$$

- $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}_{\mathbf{rrrr}}$  rappresentano tensori del quarto ordine, il secondo tensore è ottenuto dal prodotto tensoriale  $\mathbf{D}_{\mathbf{rrrr}} = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ :

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

$$\mathbb{C} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} C_{1111}^{(3)} & C_{1211}^{(3)} & C_{1311}^{(3)} & C_{1112}^{(3)} & C_{1212}^{(3)} & C_{1312}^{(3)} & C_{1113}^{(3)} & C_{1213}^{(3)} & C_{1313}^{(3)} \\ C_{2111}^{(3)} & C_{2211}^{(3)} & C_{2311}^{(3)} & C_{2112}^{(3)} & C_{2212}^{(3)} & C_{2312}^{(3)} & C_{2113}^{(3)} & C_{2213}^{(3)} & C_{2313}^{(3)} \\ C_{3111}^{(3)} & C_{3211}^{(3)} & C_{3311}^{(3)} & C_{3112}^{(3)} & C_{3212}^{(3)} & C_{3312}^{(3)} & C_{3113}^{(3)} & C_{3213}^{(3)} & C_{3313}^{(3)} \\ \hline C_{1121}^{(3)} & C_{1221}^{(3)} & C_{1321}^{(3)} & C_{1122}^{(3)} & C_{1222}^{(3)} & C_{1322}^{(3)} & C_{1123}^{(3)} & C_{1223}^{(3)} & C_{1323}^{(3)} \\ C_{2121}^{(3)} & C_{2221}^{(3)} & C_{2321}^{(3)} & C_{2122}^{(3)} & C_{2222}^{(3)} & C_{2322}^{(3)} & C_{2123}^{(3)} & C_{2223}^{(3)} & C_{2323}^{(3)} \\ C_{3121}^{(3)} & C_{3221}^{(3)} & C_{3321}^{(3)} & C_{3122}^{(3)} & C_{3222}^{(3)} & C_{3322}^{(3)} & C_{3123}^{(3)} & C_{3223}^{(3)} & C_{3323}^{(3)} \\ \hline C_{1131}^{(3)} & C_{1231}^{(3)} & C_{1331}^{(3)} & C_{1132}^{(3)} & C_{1232}^{(3)} & C_{1332}^{(3)} & C_{1133}^{(3)} & C_{1233}^{(3)} & C_{1333}^{(3)} \\ C_{2131}^{(3)} & C_{2231}^{(3)} & C_{2331}^{(3)} & C_{2132}^{(3)} & C_{2232}^{(3)} & C_{2332}^{(3)} & C_{2133}^{(3)} & C_{2233}^{(3)} & C_{2333}^{(3)} \\ C_{3131}^{(3)} & C_{3231}^{(3)} & C_{3331}^{(3)} & C_{3132}^{(3)} & C_{3232}^{(3)} & C_{3332}^{(3)} & C_{3133}^{(3)} & C_{3233}^{(3)} & C_{3333}^{(3)} \end{array} \right] \quad (6.11)$$

e

$$\mathbb{D}_{rrrr} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} x^4 & x^3y & x^3z & x^3y & x^2y^2 & x^2zy & x^3z & x^2yz & x^2z^2 \\ yx^3 & x^2y^2 & x^2yz & y^2x^2 & xy^3 & xy^2z & yx^2z & xy^2z & xyz^2 \\ zx^3 & x^2zy & x^2z^2 & zx^2y & xzy^2 & xz^2y & zx^3 & xz^2y & xz^3 \\ \hline x^3y & x^2y^2 & x^2zy & x^2y^2 & xy^3 & xzy^2 & x^2yz & xy^2z & xz^2y \\ y^2x^2 & y^3x & y^2zx & y^3x & y^4 & y^3z & y^2xz & y^3z & y^2z^2 \\ zx^2y & zy^2x & z^2yx & zxy^2 & zy^3 & z^2y^2 & zx^2y & z^2y^2 & z^3y \\ \hline x^3z & x^2yz & x^2z^2 & x^2zy & xy^2z & xz^2y & x^2z^2 & xyz^2 & xz^3 \\ yx^2z & y^2zx & yz^2x & y^2xz & y^3z & y^2z^2 & yxz^2 & y^2z^2 & yz^3 \\ z^2x^2 & z^2yx & z^3x & z^2xy & z^2y^2 & z^3y & z^3x & z^3y & z^4 \end{array} \right] \quad (6.12)$$

le componenti del tensore  $\mathbb{C}$  si rappresentano di seguito:

$$C_{1111}^{(3)} = c_{400} \quad C_{2222}^{(3)} = c_{040} \quad C_{3333}^{(3)} = c_{004} \quad (6.13)$$

$$C_{1112}^{(3)} = C_{1121}^{(3)} = C_{1211}^{(3)} = C_{2111}^{(3)} = c_{310}/4$$

$$C_{1222}^{(3)} = C_{2122}^{(3)} = C_{2212}^{(3)} = C_{2221}^{(3)} = c_{130}/4$$

$$C_{2223}^{(3)} = C_{2232}^{(3)} = C_{2322}^{(3)} = C_{3222}^{(3)} = c_{031}/4$$

$$C_{1222}^{(3)} = C_{2122}^{(3)} = C_{2212}^{(3)} = C_{2221}^{(3)} = c_{130}/4$$

$$C_{2333}^{(3)} = C_{3233}^{(3)} = C_{3323}^{(3)} = C_{3332}^{(3)} = c_{013}/4$$

$$C_{3331}^{(3)} = C_{3313}^{(3)} = C_{3133}^{(3)} = C_{1333}^{(3)} = c_{103}/4$$

$$C_{1222}^{(3)} = C_{2122}^{(3)} = C_{2212}^{(3)} = C_{2221}^{(3)} = c_{130}/4$$

$$C_{3111}^{(3)} = C_{1311}^{(3)} = C_{1131}^{(3)} = C_{1113}^{(3)} = c_{301}/4$$

$$C_{1122}^{(3)} = C_{2211}^{(3)} = C_{1212}^{(3)} = C_{2121}^{(3)} = C_{1221}^{(3)} = C_{2112}^{(3)} = c_{220}/6$$

$$C_{2233}^{(3)} = C_{3322}^{(3)} = C_{2323}^{(3)} = C_{3232}^{(3)} = C_{2332}^{(3)} = C_{3223}^{(3)} = c_{022}/6 \quad (6.15)$$

$$C_{3311}^{(3)} = C_{1133}^{(3)} = C_{3131}^{(3)} = C_{1313}^{(3)} = C_{3113}^{(3)} = C_{1331}^{(3)} = c_{202}/6$$

## Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

$$\begin{aligned}
 C_{1123}^{(3)} = C_{1231}^{(3)} &= C_{1312}^{(3)} = C_{1213}^{(3)} = C_{1321}^{(3)} = C_{1132}^{(3)} = C_{2311}^{(3)} = \\
 &= C_{3112}^{(3)} = C_{2113}^{(3)} = C_{3211}^{(3)} = C_{2131}^{(3)} = C_{3121}^{(3)} = c_{211}/12 \\
 C_{2231}^{(3)} = C_{2312}^{(3)} &= C_{2123}^{(3)} = C_{2321}^{(3)} = C_{2132}^{(3)} = C_{2213}^{(3)} = C_{3122}^{(3)} = \\
 &= C_{1223}^{(3)} = C_{3221}^{(3)} = C_{1322}^{(3)} = C_{3212}^{(3)} = C_{1232}^{(3)} = c_{121}/12 \\
 C_{3312}^{(3)} = C_{3123}^{(3)} &= C_{3231}^{(3)} = C_{3132}^{(3)} = C_{3213}^{(3)} = C_{3321}^{(3)} = C_{1233}^{(3)} = \\
 &= C_{2331}^{(3)} = C_{1332}^{(3)} = C_{2133}^{(3)} = C_{1323}^{(3)} = C_{2313}^{(3)} = c_{112}/12
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

In conclusione, otteniamo l'espressione del potenziale:

$$U(\mathbf{o}) = G \int_{\Omega} \frac{\delta_0 U_0 + \mathbf{c}^{(1)} \cdot \mathbf{U}_1 + \mathbf{C}^{(2)} \cdot \mathbf{U}_2 + \mathbf{C}^{(3)} \cdot \mathbf{U}_3 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_4}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) = G \sum_{m=0}^4 C^{(m)} \cdot U_{(m)} \tag{6.17}$$

dove con  $U_{(m)}$  si considera il contributo del potenziale gravitazionale associato alla  $i$ -esima potenza del polinomio che rappresenta la variazione di densità e con  $C^{(m)}$  i coefficienti della funzione densità espressa in (6.6),  $C^{(0)} = \delta_0$ ,  $C^{(1)} = \mathbf{c}^{(1)}$ ,  $C^{(2)} = \mathbf{C}^{(2)}$ ,  $C^{(3)} = \mathbf{C}^{(3)}$  e  $C^{(4)} = \mathbf{C}$ .

Al variare di  $m$  possiamo definire i seguenti contributi di  $U_{(m)}$ :

$$U_0 = \int_{\Omega} \frac{1}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) \quad \mathbf{U}_1 = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) \quad \mathbf{U}_2 = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) \tag{6.18}$$

e

$$\mathbf{U}_3 = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) \quad \mathbf{U}_4 = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}). \tag{6.19}$$

Gli integrali  $U_0$  e  $\mathbf{U}_1$  sono stati calcolati nel paragrafo 4.4.2, relazione (4.8) e (4.7) coincidenti rispettivamente con  $U_c$  ed  $\mathbf{U}_l$ .

### 6.1.1 Espressione analitica degli Integrali 3D in integrali 2D

Gli integrale 3D  $U_{(m)}$  rappresentati in (6.18) e (6.19) al variare di  $m \in [0, 4]$ , vengono trasformati in integrali 2D estesi alle facce del dominio di  $\Omega$ , applicando il teorema di Gauss [35].

Considerando un approccio generale, si rappresenta l'integrale  $U_{(m)}$  come:

$$U_{(m)} = \int_{\Omega} \frac{[\otimes \mathbf{r}, m]}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{r}) \quad m = 0, 1, \dots \tag{6.20}$$

con  $[\otimes \mathbf{r}, m]$  che rappresenta un tensore di rango  $m$  definito come:

$$[\otimes \mathbf{r}, m] = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ \mathbf{r} & \text{se } m = 1 \\ \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} & \text{se } m = 2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}}_{m \text{ volte}} & \text{se } m > 2. \end{cases} \tag{6.21}$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

Per poter trasformare gli integrali 3D come integrali 2D estesi alle facce del dominio di  $\Omega$ , si introducono varie identità differenziali:

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [\text{grad} \mathbf{a}]^T \mathbf{b} + [\text{grad} \mathbf{b}]^T \mathbf{a} \quad (6.22)$$

$$\text{div} [\varphi \mathbf{a}] = \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \text{div} \mathbf{a} \quad (6.23)$$

$$\text{grad} [\varphi \mathbf{a}] = \mathbf{a} \otimes \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \mathbf{a} \quad (6.24)$$

$$\text{div} [\varphi (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] = \text{grad}(\varphi \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \varphi \mathbf{a} \cdot \text{div} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \text{grad} \varphi) \cdot \mathbf{b} + \varphi (\text{grad} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \varphi \mathbf{a} \cdot \text{div} \mathbf{b} \quad (6.25)$$

$$\text{grad} [\varphi (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \otimes \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \mathbf{a} \otimes_{132} \mathbf{b} + \varphi \mathbf{a} \otimes \text{grad} \mathbf{b} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \text{div} [\varphi (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})] &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) \text{grad} \varphi + \varphi [(\text{grad} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}] \otimes \mathbf{b} + \\ &+ \varphi \mathbf{a} \otimes [(\text{grad} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] + \varphi (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \text{div} \mathbf{c} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \text{grad} [\varphi (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})] &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) \otimes \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \mathbf{a} \otimes_{1423} (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) + \\ &+ \varphi \mathbf{a} \otimes \text{grad} \mathbf{b} \otimes_{243} \mathbf{c} + \varphi \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \text{grad} \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \text{div} [\varphi (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})] &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \text{grad} \varphi + \varphi [(\text{grad} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}] \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \\ &+ \varphi \mathbf{a} \otimes [(\text{grad} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}] \otimes \mathbf{c} + \varphi \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes [(\text{grad} \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}] + \\ &+ \varphi \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \cdot \text{div} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.29)$$

dove  $\varphi$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  sono scalari e vettori del campo differenziale,  $(\cdot)^T$  sta per la trasposta e  $\otimes_{132}$ ,  $\otimes_{1423}$  sono prodotti tensoriali con gli indici che vengono scambiati di posizione; identità necessarie per poter applicare il teorema di Gauss, ottenendo:

$$U_{(m)} = \frac{1}{m+2} \int_{\partial\Omega} \frac{[\otimes \mathbf{r}, m](\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \quad m = 0, 1, \dots \quad (6.30)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore 3D uscente dal confine di  $\partial\Omega$ .

Per fissare le idee si considera l'integrale (6.20) e (6.30), per  $m = 2$

$$U_{(2)} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \quad (6.31)$$

Richiamando l'identità differenziali (6.27) abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{div} \left[ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] &= \\ &= \left[ (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \left[ (\text{grad} \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] \otimes \mathbf{r} + \\ &+ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \otimes \left[ (\text{grad} \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \text{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

Applicando l'identità (6.22) si ha che  $\text{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r}$  e  $\text{grad}\mathbf{r} = \mathbf{I}_{2D}$ , con  $\mathbf{I}_{2D}$  un tensore identità di rango 2. Quindi la formula (6.32) diventa

$$\begin{aligned}
 & \text{div} \left[ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] = \\
 & = 2 \left[ (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \left[ \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] + \\
 & + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \text{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} = \\
 & = 4 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \text{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Infine, l'integrazione precedente su  $\Omega$  diventa

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\Omega} \text{div} \left[ (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right] dV - \int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \text{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV \right\}. \tag{6.34}$$

Il secondo integrale al secondo membro può essere calcolato mediante il risultato generale in [37].

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{r}) \text{div} \left[ \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] dV = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{o} \notin \Omega \\ \alpha_V(\mathbf{o}) \varphi(\mathbf{o}) & \text{se } \mathbf{o} \in \Omega \end{cases} \tag{6.35}$$

dove  $\varphi$  è un campo scalare continuo e la quantità  $\alpha_V$  rappresenta la misura angolare, espressa in steradiani, dell'intersezione tra  $\Omega$  e un intorno sferico del punto di singolarità  $\mathbf{r} = \mathbf{o}$ .

A causa di (6.35) si deduce che il secondo integrale a destra di (6.34) è un tensore di rango due nullo  $\mathbf{O}$  poiché

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \text{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV = \begin{cases} \mathbf{O} & \text{se } \mathbf{o} \notin \Omega \\ [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]_{\mathbf{r}=\mathbf{o}} \alpha_V(\mathbf{o}) & \text{se } \mathbf{o} \in \Omega. \end{cases} \tag{6.36}$$

l'espressione  $[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]_{\mathbf{r}=\mathbf{o}}$  equivale a valutare la quantità  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$  nel punto di singolarità  $\mathbf{r} = \mathbf{o}$ , che produce banalmente il tensore nullo  $\mathbf{O}$ . Quindi, secondo (6.36), l'ultimo integrale in (6.34) è sempre un tensore nullo, indipendentemente dalla posizione del punto di singolarità  $\mathbf{r} = \mathbf{o}$  rispetto al dominio  $\Omega$  di integrazione.

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale del secondo membro in (6.34), otteniamo l'equazione in (6.31).

Nel caso dell'integrale (6.20) per  $m = 3$

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{5} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \tag{6.37}$$

## Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

Richiamando l'identità differenziali (6.28) :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left[ \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right] &= \operatorname{div} \left[ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] = \\
 &= \operatorname{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \left[ \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \left[ (\operatorname{grad} \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + \\
 &+ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \otimes \left[ (\operatorname{grad} \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] \otimes \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \left[ (\operatorname{grad} \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} \right] + \\
 &+ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} .
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

e l'identità (6.22),

$$\operatorname{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = [\operatorname{grad} \mathbf{r}]^T \mathbf{r} + [\operatorname{grad} \mathbf{r}]^T \mathbf{r} = 2 \mathbf{r} \tag{6.39}$$

Sostituendo nella precedente relazione in (6.38) si ottiene

$$\operatorname{div} \left[ \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right] = 5 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} . \tag{6.40}$$

Infine sostituendo la (6.40) al primo membro di (6.37):

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{5} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right] dV - \frac{1}{5} \int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV . \tag{6.41}$$

Il secondo integrale del secondo membro mediante le considerazioni introdotte nella (6.35), rappresentano sempre un tensore nullo,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} dV = \begin{cases} \mathbf{O} & \text{se } \mathbf{o} \notin \Omega \\ [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{o}} \alpha_V(\mathbf{o}) & \text{se } \mathbf{o} \in \Omega . \end{cases} \tag{6.42}$$

L'espressione  $[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{o}}$  equivale a valutare la quantità  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$  nel punto di singolarità  $\mathbf{r} = \mathbf{o}$ , che produce banalmente il tensore nullo  $\mathbf{O}$ .

Applicando il teorema di Gauss, abbiamo:

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{5} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right] dV = \frac{1}{5} \int_{\partial \Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA . \tag{6.43}$$

In conclusione, abbiamo che gli integrali 3D espressi in (6.20) al variare di  $m$ , possono essere sempre trasformati in integrali 2D come definito nella relazione (6.30). Quindi i contributi del potenziale gravitazionale (6.17) sono ben definiti qualunque sia l'ordine della legge polinomiale che esprime la variazione di densità di  $\Omega$ , nel senso

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

che non presentano singolarità qualunque sia la posizione del punto  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\Omega$ .  
Con queste considerazioni, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \int_{\Omega} \frac{dV}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \\
 \mathbf{U}_1 &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \\
 \mathbf{U}_2 &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \\
 \mathbf{U}_3 &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{5} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA \\
 \mathbf{U}_4 &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV = \frac{1}{6} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA.
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Considerando il dominio  $\Omega$  come un corpo poliedrico qualsiasi, caratterizzato da  $N_F$  facce, vedi Figura 17, il generico integrale in (6.30) può essere riscritto come

$$U_{(m)} = \frac{1}{m+2} \int_{\partial\Omega} \frac{[\otimes \mathbf{r}, m](\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dA = \frac{1}{m+2} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_i} \frac{[\otimes \mathbf{r}_i, m](\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i \tag{6.45}$$

Quindi, gli integrali (6.44) diventano:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} \\
 \mathbf{U}_1 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_i} \frac{\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{\mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{U}_2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{U}_3 &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{U}_4 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_i} \frac{(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i.
 \end{aligned} \tag{6.46}$$



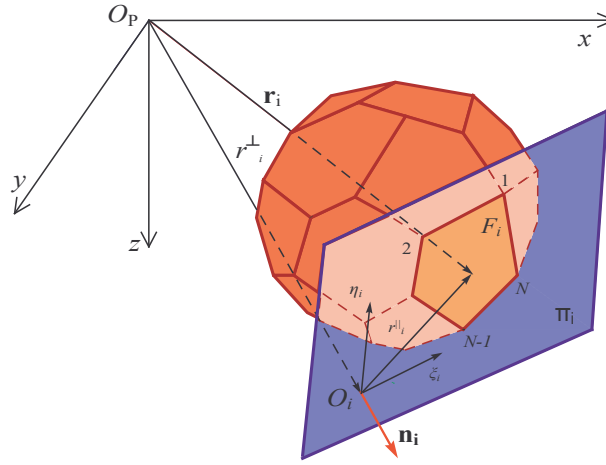


Figura 17 - Dominio poliedrico  $\Omega$  e decomposizione del vettore posizione sulla faccia

Si può osservare che, nell'ultima uguaglianza degli integrali in (6.46), ogni formula dipende dal vettore  $\mathbf{r}_i$  della  $i$ -esima faccia  $F_i$  ed il vettore posizione  $i$ -esimo può essere scomposto come segue:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^\perp + \mathbf{r}_i^\parallel, \quad (6.47)$$

come somma del vettore  $\mathbf{r}_i^\perp$  ortogonale a  $F_i$  e il vettore  $\mathbf{r}_i^\parallel$  parallelo alla faccia, vedi Figura 17.

Denotando con  $\mathbf{n}_i$  il versore uscente dalla faccia, e considerando il prodotto  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_i^\perp \cdot \mathbf{n}_i = d_i$ ,  $d_i$  rappresenta la distanza misurata ortogonalmente tra l'origine  $O_P$  del sistema di riferimento globale e  $i$ -esima faccia  $F_i$ . Traslando il sistema di riferimento globale  $[O_P, x, y, z]$  sull' $i$ -esima faccia  $F_i$ , abbiamo un sistema di riferimento locale  $[O_i, \xi_i, \eta_i]$ .

Inoltre, esprimendo la formula (6.47) nella seguente forma

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^\perp + \mathbf{r}_i^\parallel = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i + \mathbf{r}_i^\parallel = d_i\mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i}\boldsymbol{\rho}_i \quad (6.48)$$

dove il vettore  $\boldsymbol{\rho}_i = (\xi_i, \eta_i)$  rappresenta il vettore posizione di un generico punto nella  $i$ -esima faccia, rispetto l'origine del sistema di riferimento locale, associato alla faccia stessa, e con la matrice  $\mathbf{T}_{F_i}$

$$\mathbf{T}_{F_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i1} & \mathbf{v}_{i1} \\ \mathbf{u}_{i2} & \mathbf{v}_{i2} \\ \mathbf{u}_{i3} & \mathbf{v}_{i3} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

un operatore lineare che trasforma il vettore 2D  $\boldsymbol{\rho}_i$  a quello 3D  $\mathbf{r}_i^\parallel$ . A loro volta  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$  rappresentano due versori 3D distinti, ma arbitrari, paralleli a  $F_i$ .

Agli integrali (6.46) sostituendo ad  $\mathbf{r}_i$  la relazione (6.48) ed il prodotto scalare

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = (d_i\mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i}\boldsymbol{\rho}_i) \cdot (d_i\mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i}\boldsymbol{\rho}_i) = \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2 \quad (6.50)$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

dove:

- $d_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \cdot d_i \mathbf{n}_i = 0$  essendo due vettori ortogonali;
- $d_i \mathbf{n}_i \cdot d_i \mathbf{n}_i = d_i^2$  in cui  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i = 1$  prodotto scalare di due versori paralleli e coincidenti;
- $\mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i$  in cui  $\mathbf{T}_{F_i}^T \cdot \mathbf{T}_{F_i} = I_{2D}$  equivalente ad matrice identità di rango 2;

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} \\
 \mathbf{U}_1 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{U}_2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{(d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i)}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{U}_3 &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{(d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i)}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\
 \mathbf{U}_4 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \int_{F_i} \frac{(d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (d_i \mathbf{n}_i + \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i)}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Introducendo un'ulteriore relazione generica nella  $i$ -esima faccia  $F_i$  che tiene conto del termine  $\boldsymbol{\rho}_i$ :

$$\mathbf{I}_{F_i}^{(m)} = \int_{F_i} \frac{[\otimes \boldsymbol{\rho}_i, m]}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \quad m \in [0, 4] \tag{6.52}$$

con

$$[\otimes \boldsymbol{\rho}_i, m] = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ \boldsymbol{\rho}_i & \text{se } m = 1 \\ \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i & \text{se } m = 2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \underbrace{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\rho}_i}_{m \text{ volte}} & \text{se } m > 2. \end{cases} \tag{6.53}$$

si definiscono al variare di  $m$ , i seguenti gli integrali al contorno sulle facce  $F_i$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{F_i}^{(0)} &= \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} \\
 \mathbf{I}_{F_i}^{(1)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{I}_{F_i}^{(2)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{I}_{F_i}^{(3)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \\
 \mathbf{I}_{F_i}^{(4)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i,
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

E definendo un operatore formale  $\mathbb{T}_{F_i}^{b\dots b}$  dove il simbolo  $b\dots b$  denota una sequenza arbitraria di 0 e 1, tipo:

$$\mathbb{T}_{F_i}^{11} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(2)} = \mathbb{T}_{F_i}^{11} \cdot \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \int_{F_i} \frac{\mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \mathbf{T}_{F_i} \mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \mathbf{T}_{F_i}^T, \tag{6.55}$$

$$\mathbb{T}_{F_i}^{101} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) = \mathbb{T}_{F_i}^{101} \cdot \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \int_{F_i} \frac{\mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i \tag{6.56}$$

$$\mathbb{T}_{F_i}^{1111} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(4)} = \mathbb{T}_{F_i}^{1111} \cdot \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i = \int_{F_i} \frac{\mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{T}_{F_i} \boldsymbol{\rho}_i}{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)^{1/2}} dA_i \tag{6.57}$$

dove i suffissi 1 (o 0) di  $\mathbb{T}_{F_i}$  indicano che l'operatore  $\mathbf{T}_{F_i}$  deve (non deve) essere applicato al vettore  $\mathbf{n}_i$ ;

è possibile esplicitare in conclusione, tutti i contributi (6.18) e (6.19) del potenziale gravitazionale (6.17):

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} d_i \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(0)}, \tag{6.58}$$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_F} d_i^2 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(0)} + d_i \mathbf{T}_{F_i} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(1)}, \tag{6.59}$$

$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_F} d_i^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(0)} + d_i^2 [(\mathbf{T}_{F_i} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(1)}) \otimes \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i \otimes (\mathbf{T}_{F_i} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(1)})] + d_i \mathbf{T}_{F_i} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \cdot \mathbf{T}_{F_i}^T, \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_3 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{N_F} & d_i^4 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(0)} + \\
 & + d_i^3 \left[ \mathbb{T}_{F_i}^{001} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{010} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{100} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \right] + \\
 & + d_i^2 \left[ \mathbb{T}_{F_i}^{011} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{101} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{110} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i) \right] + d_i \mathbb{T}_{F_i}^{111} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(3)},
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_4 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_F} & d_i^5 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(0)} + \\
 & + d_i^4 \left[ \mathbb{T}_{F_i}^{0001} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{0010} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \right. \\
 & \quad \left. + \mathbb{T}_{F_i}^{0100} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{1000} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \right] + \\
 & + d_i^3 \left[ \mathbb{T}_{F_i}^{0011} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{0101} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \right. \\
 & \quad + \mathbb{T}_{F_i}^{0110} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{1001} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \\
 & \quad \left. + \mathbb{T}_{F_i}^{1010} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{1100} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \wedge \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \right] + \\
 & + d_i^2 \left[ \mathbb{T}_{F_i}^{0111} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(3)} \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{1011} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(3)} \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{1101} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(3)} \wedge \mathbf{n}_i) + \right. \\
 & \quad \left. + \mathbb{T}_{F_i}^{1101} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(3)} \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbb{T}_{F_i}^{1110} \cdot (\mathbf{I}_{F_i}^{(3)} \wedge \mathbf{n}_i) \right] + d_i \mathbb{T}_{F_i}^{1111} \cdot \mathbf{I}_{F_i}^{(4)}.
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

### 6.1.2 Espressione analitica degli Integrali 2D in integrali 1D

Mediante un'ulteriore applicazione del teorema di Gauss, gli integrali al contorno sulle facce  $F_i$  espressi in (6.54), vengono ridotti in integrali di linea monodimensionali 1D estesi agli spigoli di ciascuna faccia.

Poiché ogni faccia è poligonale, gli integrali di linea possono essere espressi come sommatoria estesa ai bordi  $N_{E_i}$  che definiscono la faccia  $F_i$ .

Per il  $j$ -esimo bordo un'opportuna parametrizzazione permette di trasformare ogni integrale 1D in un integrale che dipende da una variabile reale; questa viene scalata da un'opportuna combinazione dei vettori  $\boldsymbol{\rho}_j$  e  $\boldsymbol{\rho}_{j+1}$  che definiscono i vettori di posizione dei vertici finali del bordo nel sistema di riferimento 2D locale a  $F_i$ .

In particolare ponendo:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_i(\lambda_j) = \boldsymbol{\rho}_j + \lambda_j(\boldsymbol{\rho}_{j+1} - \boldsymbol{\rho}_j) = \boldsymbol{\rho}_j + \lambda_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j \tag{6.63}$$

dove la funzione  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_i$  si associa a ciascun valore dell'ascissa adimensionale  $\lambda_j = s_j/l_j$ , il vettore posizione lungo il  $j$ -esimo lato.

La quantità  $s_j$ ,  $s_j \in [0, l_j]$ , è l'ascissa curvilinea lungo il  $j$ -esimo lato e  $l_j = |\boldsymbol{\rho}_{j+1} - \boldsymbol{\rho}_j|$  è la lunghezza del lato.

Il vettore posizione lungo il  $j$ -esimo lato di  $F_i$  può anche essere espresso come funzione di  $s_j$  e una nuova funzione  $\boldsymbol{\rho}_i$ , che soddisfi la condizione  $\boldsymbol{\rho}_i(s_i) = \hat{\boldsymbol{\rho}}_i(\lambda_j)$ . Quindi il

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

prodotto:

$$\boldsymbol{\rho}_i(s_j) \cdot \boldsymbol{\rho}_i(s_j) = \hat{\boldsymbol{\rho}}_i(\lambda_j) \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_i(\lambda_j) = p_j \lambda_j^2 + 2q_j \lambda_j + u_j = P_u(\lambda_j) \quad (6.64)$$

dove, secondo la (6.63)

$$p_j = \Delta \boldsymbol{\rho}_j \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}_j \quad q_j = \boldsymbol{\rho}_j \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}_j \quad u_j = \boldsymbol{\rho}_j \cdot \boldsymbol{\rho}_j. \quad (6.65)$$

Inoltre

$$\boldsymbol{\rho}(s_j) \cdot \boldsymbol{\rho}(s_j) + d_i^2 = p_j \lambda_j^2 + 2q_j \lambda_j + v_j \quad (6.66)$$

dove  $v_j = u_j + d_i^2$ .

Stabilendo anche  $P_v(\lambda_j) = P_u(\lambda_j) + d_i^2$ , e con il simbolo  $(\cdot)^\perp$  la rotazione oraria del vettore 2D  $(\cdot)$  necessario per esprimere il versore normale uscente  $\boldsymbol{v}_j$  al  $j$ -esimo lato secondo la formula

$$\boldsymbol{v}_j = \frac{(\boldsymbol{\rho}_{j+1} - \boldsymbol{\rho}_j)^\perp}{l_j} = \frac{\Delta \boldsymbol{\rho}_j^\perp}{l_j}. \quad (6.67)$$

dove

$$\Delta \boldsymbol{\rho}_j = \begin{bmatrix} \Delta \xi_j \\ \Delta \eta_j \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta \boldsymbol{\rho}_j^\perp = \begin{bmatrix} -\Delta \eta_j \\ \Delta \xi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\rho}_j. \quad (6.68)$$

La rotazione oraria indicata dal simbolo  $(\cdot)^\perp$  dipende dalla convenzione adottata per rincorrere lungo il contorno  $\partial F_i$ .

In particolare, si è ipotizzato che i vertici di ciascuna faccia siano stati numerati consecutivamente circolando lungo  $\partial F_i$  in senso antiorario rispetto alla normale  $\boldsymbol{n}_i$  della faccia.

Con le ulteriori considerazioni, al variare di  $m$  si ottengono le seguenti espressioni.

Per  $m = 0$  e  $m = 1$ :

$$\mathbf{I}_{F_i}^{(0)} = \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} = \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ (\boldsymbol{\rho}_j \cdot \boldsymbol{\rho}_{j+1}^\perp) I_j \right] - |d_i| \alpha_i \quad (6.69)$$

$$\mathbf{I}_{F_i}^{(1)} = \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \Delta \boldsymbol{\rho}_j^\perp K_j^{(0)} \quad (6.70)$$

Il primo è stato già calcolato in D'Urso (2012) mentre il secondo in D'Urso (2014b).

Per  $m = 2$ , l'integrale (6.54)<sub>3</sub> si esplicita considerando l'identità differenziale (6.24):

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \right] &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \frac{1}{2} \frac{2\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \text{grad} \boldsymbol{\rho}_i = \\ &= \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} + \mathbf{I}^{(2)} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.71)$$

dove  $\mathbf{I}_{2D}$  è un tensore identità di rango 2. Sostituendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\ &= \int_{F_i} \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \right] dA_i - \mathbf{I}_{2D} \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} dA_i\end{aligned}\quad (6.72)$$

Applicando il Teorema di Gauss al primo integrale del secondo membro, si ha:

$$\int_{F_i} \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \right] dA_i = \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i \quad (6.73)$$

Per l'ultimo integrale al secondo membro, si sfrutta l'identità differenziale (6.23):

$$\begin{aligned}\text{div} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \right] &= \text{grad}(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \text{div} \boldsymbol{\rho}_i = \\ &= \frac{\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} + 2(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} = \\ &= 3(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} - \frac{d_i^2}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (6.74)$$

In tal modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_i &= \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} dA_i \\ &= \frac{1}{3} \int_{F_i} \text{div} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \right] dA_i + \frac{d_i^2}{3} \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{3} \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\nu} ds_i + \frac{d_i^2}{3} \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (6.75)$$

Quindi l'integrale (6.54)<sub>3</sub> si calcola:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{F_i}^{(2)} &= \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i + \\ &\quad - \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \left[ \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\nu} ds_i + d_i^2 \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ (\boldsymbol{\rho}_j K_j^{(0)} + \Delta \boldsymbol{\rho}_j K_j^{(1)}) \right] - \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \left\{ \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ (\boldsymbol{\rho}_j \cdot \boldsymbol{\rho}_{j+1}^\perp) K_j^{(0)} \right] + d_i^2 \mathbf{I}_{F_i}^{(0)} \right\}\end{aligned}\quad (6.76)$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

dove il terzo addendo al secondo membro coincide con (6.69).

Per  $m = 3$ , l'integrale (6.54)<sub>4</sub> si esplicita considerando l'identità differenziale (6.26):

$$\begin{aligned}
 \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] &= \\
 &= (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \otimes \text{grad}(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \left[ \text{grad} \boldsymbol{\rho}_i \otimes_{132} \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \text{grad} \boldsymbol{\rho}_i \right] = \\
 &= \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \left[ \mathbf{I}_{2D} \otimes_{132} \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} \right]
 \end{aligned} \tag{6.77}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{F_i}^{(3)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\
 &= \int_{F_i} \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] dA_i + \\
 &\quad - \mathbf{I}_{2D} \otimes_{132} \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i dA_i - \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i dA_i \otimes \mathbf{I}_{2D}
 \end{aligned} \tag{6.78}$$

Applicando il Teorema di Gauss al primo integrale del secondo membro, si ha:

$$\int_{F_i} \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] dA_i = \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i \tag{6.79}$$

Per gli ultimi due integrali al secondo membro, si sfrutta l'identità differenziale (6.25)

$$\begin{aligned}
 \text{div} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] &= \\
 &= \left[ \boldsymbol{\rho}_i \otimes \text{grad}(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\text{grad} \boldsymbol{\rho}_i) \right] \boldsymbol{\rho}_i + 2(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i = \\
 &= \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i) \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} + 3(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i = 4(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i - d_i^2 \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Così che:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_i &= \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i dA_i = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{F_i} \text{div} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] dA_i + \frac{d_i^2}{4} \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\nu} ds_i + \frac{d_i^2}{4} \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ (\boldsymbol{\rho}_j \cdot \boldsymbol{\rho}_{j+1}^\perp) (K_j^{(0)} \boldsymbol{\rho}_j + K_j^{(1)} \Delta \boldsymbol{\rho}_j) \right] + \frac{d_i^2}{4} \mathbf{I}_{F_i}^{(1)}
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

dove il secondo addendo al secondo membro coincide con (6.70).

Quindi l'integrale (6.54)<sub>4</sub> è equivalente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{F_i}^{(3)} &= \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i + \\
 &\quad - \frac{\mathbf{I}_{2D}}{4} \otimes_{132} \left[ \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\nu} ds_i + \frac{d_i^2}{4} \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \right] \\
 &\quad - \left[ \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\nu} ds_i + \frac{d_i^2}{4} \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i \right] \otimes \frac{\mathbf{I}_{2D}}{4} = \\
 &= \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i + \mathbf{I}_{2D} \otimes_{132} \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} = \\
 &= \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ K_j^{(0)} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(1)} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(2)} \mathbf{E}_{\Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} \right] \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j^\perp - \mathbf{I}_{2D} \otimes_{23} \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{I}_{2D}
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

con

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j} = \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \quad \mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} = \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j + \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \quad \mathbf{E}_{\Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} = \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j$$

che rappresentano prodotti tensoriali.

Infine per l'ultimo integrale in (6.54)<sub>5</sub>, caso  $m = 4$ , considerando identità differenziale (6.28):

$$\begin{aligned}
 \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] &= \\
 &= (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \otimes \text{grad} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} + \\
 &\quad + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \left[ \text{grad} \boldsymbol{\rho}_i \otimes_{1423} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \text{grad} \boldsymbol{\rho}_i \otimes_{243} \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \text{grad} \boldsymbol{\rho}_i \right] = \\
 &= \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \left[ \mathbf{I}_{2D} \otimes_{1423} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} \otimes_{243} \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} \right]
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{F_i}^{(4)} &= \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\
 &= \int_{F_i} \text{grad} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] dA_i + \\
 &\quad - \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \left[ \mathbf{I}_{2D} \otimes_{1423} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} \otimes_{243} \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} \right] dA_i
 \end{aligned} \tag{6.84}$$



Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

Applicando il Teorema di Gauss al primo integrale del secondo membro, si ha:

$$\int_{F_i} \text{grad} [(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i)] dA_i = \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i \quad (6.85)$$

Per il secondo integrale al secondo membro, ponendo con:

$$\mathbf{B}_i = \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) dA_i \quad (6.86)$$

si sfrutta l'identità differenziale (6.27)

$$\begin{aligned} & \text{div} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] = \\ & = \left[ \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \right] (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) + (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \left[ [(\text{grad } \boldsymbol{\rho}_i) \boldsymbol{\rho}_i] \otimes \boldsymbol{\rho}_i + \right. \\ & \quad \left. + \boldsymbol{\rho}_i \otimes [(\text{grad } \boldsymbol{\rho}_i) \boldsymbol{\rho}_i] + (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \text{div } \boldsymbol{\rho}_i \right] = \\ & = \frac{\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) + 4(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) = \\ & = 5(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) - d_i^2 \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i)}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.87)$$

Così che:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i & = \int_{F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i dA_i = \\ & = \frac{1}{5} \int_{F_i} \text{div} \left[ (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes (\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i) \right] dA_i + \frac{d_i^2}{5} \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\ & = \frac{1}{5} \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\nu} ds_i + \frac{d_i^2}{5} \int_{F_i} \frac{\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i}{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2}} dA_i = \\ & = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ (\boldsymbol{\rho}_j \cdot \boldsymbol{\rho}_{j+1}^\perp) (K_j^{(0)} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(1)} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(2)} \mathbf{E}_{\Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j}) \right] + \frac{d_i^2}{5} \mathbf{I}_{F_i}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.88)$$

dove il secondo addendo al secondo membro coincide con (6.76).

Quindi l'integrale (6.54)<sub>5</sub> diventa:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{F_i}^{(4)} &= \int_{\partial F_i} (\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + d_i^2)^{1/2} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\nu} ds_i - \mathbf{I}_{2D} \otimes_{1423} \mathbf{B}_i + \mathbf{I}_{2D} \otimes_{243} \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i \otimes \mathbf{I}_{2D} = \\
 &= \sum_{j=1}^{N_{E_i}} \left[ K_j^{(0)} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(1)} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(2)} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} + K_j^{(3)} \mathbb{E}_{\Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} \right] \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j^\perp + \\
 &\quad - \mathbf{I}_{2D} \otimes_{14} \mathbf{J}_{F_i}^{(2)} - \mathbf{I}_{2D} \otimes_{34} \mathbf{J}_{F_i}^{(2)} - \mathbf{J}_{F_i}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_{2D}
 \end{aligned} \tag{6.89}$$

con i relativi prodotti tensoriali:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j} &= \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j & \mathbb{E}_{\Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} &= \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j \\
 \mathbb{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} &= \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j + \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j + \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \\
 \mathbb{E}_{\boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j \Delta \boldsymbol{\rho}_j} &= \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j + \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j + \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_j \otimes \boldsymbol{\rho}_j
 \end{aligned}$$

Le espressioni  $I_j$ ,  $K_j^{(0)}$ ,  $K_j^{(1)}$ ,  $K_j^{(2)}$  e  $K_j^{(3)}$  rappresentano gli integrali monodimensionali trattati di seguito.

### 6.1.3 Espressioni esplicite degli integrali 1D

Seguono le espressioni algebriche degli integrali definiti.

Ricordando la definizione delle quantità  $p_j$ ,  $q_j$ ,  $u_j$ ,  $v_j$ , introdotte nelle formule (6.65) e (6.66), ponendo

$$LN_j = \ln k_j = \ln \frac{p_j + q_j + \sqrt{p_j} \sqrt{p_j + 2q_j + v_j}}{q_j + \sqrt{p_j v_j}} \tag{6.90}$$

$$ATN1_j = \arctan \frac{|d_i|(p_j + q_j)}{\sqrt{p_j u_j - q_j^2} \sqrt{p_j + 2q_j + v_j}}, \tag{6.91}$$

$$ATN2_j = \arctan \frac{|d_i|q_j}{\sqrt{p_j u_j - q_j^2} \sqrt{v_j}} \tag{6.92}$$

dove è stato aggiunto il suffisso  $(\cdot)_j$  per ricordare che si riferiscono al bordo  $j$ -esimo della generica faccia  $F_i$ .

Abbiamo:

$$I_j = \int_0^1 \frac{[p_j \lambda^2 + 2q_j \lambda_j + v_j]^{1/2}}{p_j \lambda^2 + 2q_j \lambda_j + u_j} d\lambda_j = \frac{|d_i|}{\sqrt{p_j u_j - q_j^2}} [ATN1_j - ATN2_j] + \frac{1}{\sqrt{p_j}} LN_j. \tag{6.93}$$

$$K_j^{(0)} = \int_0^1 [p_j \lambda^2 + 2q_j \lambda_j + v_j]^{1/2} d\lambda_j = \frac{(p_j + q_j) \sqrt{p_j + 2q_j + v_j} - q_j \sqrt{v_j}}{2p_j} - \frac{q_j^2 - p_j v_j}{2p_j^{3/2}} LN_j, \quad (6.94)$$

$$\begin{aligned} K_j^{(1)} &= \int_0^1 [p_j \lambda^2 + 2q_j \lambda_j + v_j]^{1/2} \lambda_j d\lambda_j = \\ &= \frac{1}{6p_j^2} [(2p_j^2 + p_j q_j + 2p_j v_j - 3q_j^2) \sqrt{p_j + 2q_j + v_j} + (3q_j^2 - 2p_j v_j) \sqrt{v_j}] + \\ &\quad + \frac{q_j^3 - p_j q_j v_j}{2p_j^{5/2}} LN_j, \end{aligned} \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned} K_j^{(2)} &= \int_0^1 [p_j \lambda^2 + 2q_j \lambda_j + v_j]^{1/2} \lambda_j^2 d\lambda_j = \\ &= \frac{1}{24p_j^3} [(6p_j^3 + p_j^2(2q_j + 3v_j) - p_j q_j(5q_j - 13v_j) + 15q_j^3) \sqrt{p_j + 2q_j + v_j} + \\ &\quad + (13p_j v_j q_j - 15q_j^3) \sqrt{v_j}] + \frac{(q_j^2 - p_j v_j)(5q_j^2 - p_j v_j)}{8p_j^{7/2}} LN_j, \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} K_j^{(3)} &= \int_0^1 [p_j \lambda^2 + 2q_j \lambda_j + v_j]^{1/2} \lambda_j^3 d\lambda_j = \\ &= \frac{1}{120p_j^4} \left\{ [24p_j^4 + p_j^3(6q_j + 8v_j) - p_j^2(14q_j^2 + 29q_j v_j + 16v_j^2) + \right. \\ &\quad \left. + 5p_j q_j^2(7q_j + 23v_j) - 105q_j^4] \sqrt{p_j + 2q_j + v_j} + \right. \\ &\quad \left. + (16p_j^2 v_j^2 - 115p_j q_j^2 v_j + 105q_j^4) \sqrt{v_j} \right\} + \frac{q_j(7q_j^2 - 3p_j v_j)(q_j^2 - p_j v_j)}{8p_j^{9/2}} LN_j, \end{aligned} \quad (6.97)$$

## 6.2 Potenziale in un punto arbitrario $P$

Nella sezione precedente si è ipotizzato che il punto di osservazione  $P$  coincida con l'origine del sistema di riferimento globale, ovvero  $\mathbf{s} = \mathbf{r}$  con  $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ .

Considerando un approccio generale, denotando con  $\mathbf{p}$  il vettore posizione di un punto arbitrario  $P$ , il potenziale gravitazionale  $U$  è espresso come

$$U(P) = U(\mathbf{p}) = G \int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{s})}{[(\mathbf{p} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{s})]^{1/2}} dV(\mathbf{s}) \quad (6.98)$$

per semplificare l'espressione si introduce il vettore posizione  $\mathbf{r}$  come:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{p} \quad (6.99)$$

ottenendo

$$U(P) = U(\mathbf{p}) = G \int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{s})}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{s}) \quad (6.100)$$

Si esprime con  $\delta(\mathbf{s})$ , l'espressione della densità nel nuovo sistema di riferimento:

$$\delta(\mathbf{s}) = \delta(x, y, z) = \delta_o + \mathbf{c}^{(1)} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{C}^{(2)} \cdot \mathbf{D}_{ss} + \mathbf{C}^{(3)} \cdot \mathbf{D}_{sss} + \mathbf{C} \cdot \mathbb{D}_{ssss} \quad (6.101)$$

dove i coefficienti  $\delta_o$ ,  $\mathbf{c}^{(1)}$ ,  $\mathbf{C}^{(2)}$ ,  $\mathbf{C}^{(3)}$  e  $\mathbf{C}$  sono descritti in (6.7), (6.8), (6.9) e (6.11).

Il vettore  $\mathbf{s}$  è equivalente a  $\mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$ , mentre occorre effettuare un'ulteriore precisazione con prodotti tensoriali che dipendono da  $\mathbf{s}$ . In cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ss} &= \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} = (\mathbf{p} + \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p}) + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = \mathbf{D}_{pp} + \mathbf{D}_{pr} + \mathbf{D}_{rr} \\ \mathbf{D}_{sss} &= \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} = (\mathbf{p} + \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{p} + \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \mathbf{D}_{ppp} + \mathbf{D}_{ppr} + \mathbf{D}_{prr} + \mathbf{D}_{rrr} \end{aligned} \quad (6.102)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ppp} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbf{D}_{ppr} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} = \mathbf{D}_{pp} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{D}_{pp} \\ \mathbf{D}_{prr} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbf{D}_{rrr} &= \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \end{aligned} \quad (6.103)$$

e

$$\mathbb{D}_{ssss} = \mathbb{D}_{pppp} + \mathbb{D}_{pppr} + \mathbb{D}_{pprr} + \mathbb{D}_{prrr} + \mathbb{D}_{rrrr} \quad (6.104)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{pppp} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbb{D}_{pppr} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbb{D}_{pprr} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} + \\ &\quad + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbb{D}_{prrr} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbb{D}_{rrrr} &= \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \end{aligned} \quad (6.105)$$

Capitolo 6 - Il Potenziale Gravitazionale di un corpo poliedrico a densità polinomiale

Ricaviamo l'espressione generale del potenziale gravitazionale:

$$U(\mathbf{p}) = G \int_{\Omega} \frac{\delta_{\mathbf{o}} + \mathbf{c}^{(1)} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{C}^{(2)} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{ss}} + \mathbf{C}^{(3)} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{sss}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{ssss}}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{s}) = G \sum_{i=0}^4 C^{(i)} \cdot \hat{U}^{(i)} \quad (6.106)$$

Per  $i = 0$  abbiamo che  $C^{(0)} = \delta_{\mathbf{o}}$  e  $\hat{U}^{(0)}$  è calcolato in (6.58).

Per  $i = 1$  abbiamo che  $C^{(1)} = \mathbf{c}^{(1)}$  e  $\hat{U}^{(1)}$  vale:

$$\hat{U}^{(1)} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{s}) = \mathbf{U}_1 + \mathbf{p} \cdot U_0 \quad (6.107)$$

integrali calcolati in (6.58) e (6.59).

Per  $i = 2$  abbiamo che  $C^{(2)} = \mathbf{C}^{(2)}$  e  $\hat{U}^{(2)}$  vale:

$$\hat{U}^{(2)} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{s}) = (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \cdot U_0 + \mathbf{p} \otimes \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{p} + \mathbf{U}_2 \quad (6.108)$$

integrali calcolati in (6.58), (6.59) e (6.60).

Per  $i = 3$  abbiamo che  $C^{(3)} = \mathbf{C}^{(3)}$  e  $\hat{U}^{(3)}$  vale:

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(3)} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{D}_{\mathbf{sss}}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{s}) = & (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \cdot U_0 + \mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{p} + \mathbf{U}_2 \otimes_{132} \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{U}_2 + \\ & + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{U}_1 + \mathbf{p} \otimes \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{p} + \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{U}_3, \end{aligned} \quad (6.109)$$

integrali calcolati in (6.58), (6.59), (6.60) e (6.61).

Per  $i = 4$  abbiamo che  $C^{(4)} = \mathbf{C}$  e  $\hat{U}^{(4)}$  vale:

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(4)} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{D}_{\mathbf{ssss}}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} dV(\mathbf{s}) = & \mathbf{D}_{\mathbf{pppp}} \cdot U_0 + \mathbf{D}_{\mathbf{ppp}} \otimes \mathbf{U}_1 + \mathbf{D}_{\mathbf{ppp}} \otimes_{1243} \mathbf{U}_1 + \\ & + \mathbf{D}_{\mathbf{ppp}} \otimes_{1423} \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{D}_{\mathbf{ppp}} + \mathbf{D}_{\mathbf{pp}} \otimes \mathbf{U}_2 + \\ & + \mathbf{D}_{\mathbf{pp}} \otimes_{1324} \mathbf{U}_2 + \mathbf{D}_{\mathbf{pp}} \otimes_{1342} \mathbf{U}_2 + \mathbf{D}_{\mathbf{pp}} \otimes_{3124} \mathbf{U}_2 + \\ & + \mathbf{D}_{\mathbf{pp}} \otimes_{3142} \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{D}_{\mathbf{pp}} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{U}_3 + \\ & + \mathbf{p} \otimes_{2134} \mathbf{U}_3 + \mathbf{p} \otimes_{2314} \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_3 \otimes \mathbf{p} + \mathbf{U}_4. \end{aligned} \quad (6.110)$$

integrali calcolati in (6.58), (6.59), (6.60), (6.61) e (6.62).

## 7. CAPITOLO 7 – ESEMPI NUMERICI

### Soluzioni numeriche per il calcolo del potenziale gravitazionale e delle sue derivate per sorgenti di forma poliedrica

Le formule indicate nel capitolo 2 sono state implementate da D’Urso [13] [14] in codici Matlab® per verificare se l’approccio proposto per il calcolo di effetti gravitazionali su modelli poliedrici siano applicabili a corpi reali.

Una serie di esempi numerici per testare la correttezza delle formule ha riguardato la mesh di forma triangolare dell’asteroide 433 EROS, già investigata a fondo da Zuber [36] e da Tsoulis [37]. Il modello utilizzato è stato quello con un numero di facce rispettivamente pari a 1.708, 7.790, 10.152 e 22.540.

Nella figura che segue è rappresentato il modello con 1.708 facce.

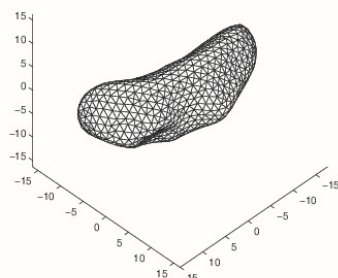


Figura 19 - Modello di poliedro dell’asteroide 433 EROS

Nella tabella seguente sono riportati i valori del potenziale e del secondo ordine di derivate dell'asteroide 433 EROS, calcolati secondo il codice Matlab<sup>®</sup> implementato da D'Urso [14].

I risultati sono riferiti ad un punto di osservazione coincidente con l'origine del sistema di riferimento e sono stati ottenuti assumendo  $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  e la densità  $\delta = 2.670 \text{ Kg m}^{-3}$ .

I calcoli sono stati effettuati allo scopo di testare il programma implementato in situazioni di complessità crescente e per stimare i tempi di esecuzione e calcolo in funzione delle facce del poliedro.

*Tabella 1 - Valori del potenziale e del secondo ordine di derivate per l'asteroide 433 EROS*

Quantity	$N_F = 1.708$	$N_F = 7.790$	$N_F = 10.152$	$N_F = 22.540$
<i>Time</i> (s)	5.429226	14.730135	19.182239	41.034172
$U$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )	6.86887867707387E-05	6.92842481400130E-05	6.93271268377282E-05	6.93982176669190E-05
$U_{,x}$ ( $\text{ms}^{-2}$ )	1.76825455806395E-07	1.75812975733089E-07	1.75537974761583E-07	1.75262758962081E-07
$U_{,y}$ ( $\text{ms}^{-2}$ )	7.77589850085898E-07	7.78077155728463E-07	7.78713449883631E-07	7.78984963349048E-07
$U_{,z}$ ( $\text{ms}^{-2}$ )	-1.35387195350492E-07	-1.38468353379429E-07	-1.39237443923765E-07	-1.39508051491509E-07
$U_{,xx}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-1.65555066637347E-07	-1.63038064763321E-07	-1.62714879023875E-07	-1.62462008020327E-07
$U_{,yy}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-1.09567457938927E-06	-1.09985783423449E-06	-1.10032568022212E-06	-1.10093869945156E-06
$U_{,zz}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-9.77571732540457E-07	-9.75905479569893E-07	-9.75760819321694E-07	-9.75400671095918E-07
$U_{,xy}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-1.99693089627594E-07	-2.00090602844709E-07	-1.99999504484800E-07	-2.00006733615375E-07
$U_{,yx}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-1.99693089627593E-07	-2.00090602844710E-07	-1.99999504484799E-07	-2.00006733615372E-07
$U_{,xz}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-7.98974456293249E-09	-8.11786871968376E-09	-8.14636885483864E-09	-8.17479181774823E-09
$U_{,zx}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	-7.98974456293250E-09	-8.11786871968375E-09	-8.14636885483863E-09	-8.17479181784828E-09
$U_{,yz}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	2.56495326728823E-08	2.71763638018798E-08	2.73729390845432E-08	2.76631302645930E-08
$U_{,zy}$ ( $\text{s}^{-2}$ )	2.56495326728824E-08	2.71763638018799E-08	2.73729390845431E-08	2.76631302645927E-08

Le formule analitiche presentate da D'Urso [13] per determinare gli effetti della gravità di corpi poliedrici con densità costante, come somma di integrali di linea estesi ai loro angoli sono state ulteriormente perfezionate in formule algebriche unicamente in funzione delle coordinate dei vertici delle facce del poliedro.

Le formule sono state ben definite con esclusione del caso in cui il punto di osservazione appartenga alla linea che contiene uno spigolo del poliedro.

Solo in questo caso risulta che si manifesti una singolarità, cioè quando il gradiente del tensore si trova fuori della diagonale, contrariamente alla quasi totalità dei casi in cui si manifestano singolarità solo per il fatto che il punto di osservazione si trovi su una delle facce del poliedro.

Di seguito viene presentato un secondo esempio condotto per verificare analiticamente la correttezza delle formule illustrate nel capitolo 2 ed elaborate da D'Urso in [25].

L'autore le ha implementate in un codice Matlab® (2012) per valutare l'efficacia dell'approccio proposto per il calcolo degli effetti gravitazionali di modelli poliedrici di corpi reali. L'esempio numerico riguarda un prisma per cui è disponibile la soluzione analitica. La numerazione di nodi riportata in Fig. 20 è uguale a quella adottata in Tsoulis [38] da cui è stato tratto l'esempio derivato.

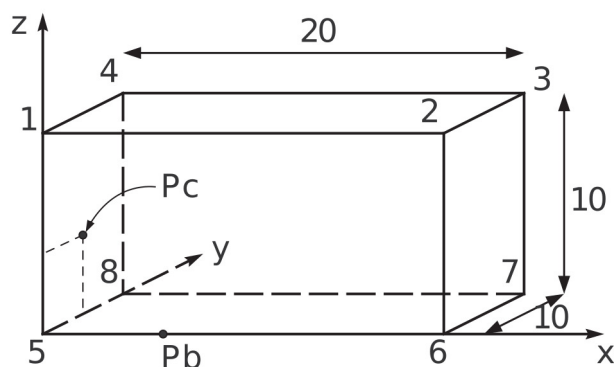


Figura 20 - Prisma utilizzato da D'Urso in [14] per la validazione delle formule

La tabella 2 confronta i risultati ottenuti nel documento citato [38] con quelli calcolati da D'Urso nel proprio codice.

In particolare, il punto di osservazione è stato posto nel vertice 5, ad una distanza di 5 dal vertice 5 lungo il bordo 5-6 e, come terza posizione, ad una distanza di 3 lungo l'asse y e di 2 lungo l'asse z in Fig. 20.

Dalla tabella 2 risulta che i risultati coincidono con quelli riportati da Tsoulis fino alla sesta cifra.

Come affermato da Tsoulis e in modo completo discusso in Nagy et al. [39], la seconda derivata del potenziale mostrava singolarità ogni volta che il punto di osservazione appartiene a una linea contenente un bordo o appartiene a una faccia. Quindi gli autori non riuscivano a determinare la derivata secondo in questa circostanza.

Invece D'Urso è riuscita a calcolare la derivata seconda per l'osservazione nel punto  $P_c = (0, 3, 2)$  in Fig. 20; i risultati rilevanti sono così riportati nella tabella 2 sebbene non possano essere confrontati con risultati analoghi in letteratura. L'autore ha elaborato, a ulteriore riprova della correttezza dei suoi assunti, entrambe le derivate seconde in posizione simmetrica rispetto alla diagonale principale di  $d^2_P U(P)$  per mostrare come la simmetria della derivata del secondo ordine, a parte l'ultima cifra dei risultati numerici, è correttamente assicurata al proprio algoritmo, un problema che non era poi così ovvio osservando la letteratura precedente.



In alternativa al calcolo analitico di  $K_{Fi}$  (seguito della formula (10) in [19]) si può ricorrere a schemi numerici concepiti direttamente per integrali 1D che mostrano singolarità "deboli" o "forti". È quanto è stato trattato da Klees [40], Klees e Lehmann [41] per risultati specifici della letteratura geodetica e da Gray et al. [42], Khayat e Wilton [43] per altri campi di applicazione.

Comparisons between our results and those published by Tsoulis (2012)—coordinates of  $P$  in the reference frame of Fig. 3: (a)  $P = (0, 0, 0)$ ; (b)  $P = (5, 0, 0)$ ; (c)  $P = (0, 3, 2)$

Point	Quantity	A - Tsoulis (2012)	B - Present	B-A /B
(a)	$U$ (m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> )	3.19403785211789E-05	3.19403761604211E-05	7,39113908587698E-08
	$U_x$ (ms <sup>-2</sup> )	2,31329166055125E-06	2,31329148957265E-06	7,39113890958774E-08
	$U_y$ (ms <sup>-2</sup> )	1,91973934132247E-06	1,91973919943187E-06	7,39113883925678E-08
	$U_z$ (ms <sup>-2</sup> )	1,91973934132247E-06	1,91973919943187E-05	7,39113883925678E-08
(b)	$U$ (m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> )	3.99993588503205E-05	3.99993558939122E-05	7,39113921558254E-08
	$U_x$ (ms <sup>-2</sup> )	9.90115608070892E-07	9.90115534890074E-07	7,39113911578808E-08
	$U_y$ (ms <sup>-2</sup> )	3.24128066205471E-06	3.24128042248715E-06	7,39113902916302E-08
	$U_z$ (ms <sup>-2</sup> )	3.24128066205471E-06	3.24128042248715E-05	7,39113902916302E-08
(c)	$U$ (m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> )	4.03528405297199E-05	4.03528375471853E-05	7,39113915251685E-08
	$U_x$ (ms <sup>-2</sup> )	4.73368627552346E-06	4.73368592565013E-06	7,39113895346874E-08
	$U_y$ (ms <sup>-2</sup> )	9.68164434450931E-07	9.68164362892554E-05	7,39113919630668E-08
	$U_z$ (ms <sup>-2</sup> )	1.59674512177260E-06	1.59674500375495E-05	7,39113890079042E-08
	$U_{,xx}$ (s <sup>-2</sup> )	-	-4,02204713784183E-08	-
	$U_{,yy}$ (s <sup>-2</sup> )	-	-5,01781942367494E-07	-
	$U_{,zz}$ (s <sup>-2</sup> )	-	-5,77398275537941E-07	-
	$U_{,xy}$ (s <sup>-2</sup> )	-	1,87140408935899E-07	-
	$U_{,yx}$ (s <sup>-2</sup> )	-	1,87140408935899E-07	-
	$U_{,xz}$ (s <sup>-2</sup> )	-	3,51261972418670E-07	-
	$U_{,zx}$ (s <sup>-2</sup> )	-	3,51261972418670E-07	-
	$U_{,yz}$ (s <sup>-2</sup> )	-	8,58712984897779E-08	-
	$U_{,zy}$ (s <sup>-2</sup> )	-	8,58712984897789E-08	-

Tabella 2 - Confronto tra i risultati di Tsoulis e D'Urso (present)

Oltre ai test documentati nella Tabella 2 sono stati effettuati i seguenti test di validazione: in primo luogo, gli effetti di gravità indotti dal prisma in Fig. 20 sono stati numericamente calcolati in punti di osservazione posti ai nodi di una griglia regolare opportunamente distanziata, che racchiude il prisma di interesse e avente lati uguali a tre volte quelli del prisma.

In questo modo è stato possibile posizionare automaticamente il punto di osservazione arbitrariamente rispetto al prisma e, in particolare, per testare il codice ogni volta che il punto di osservazione coincide con un vertice, quando giace lungo una linea contenente un bordo o appartiene a una faccia del prisma.

Nel caso particolare del punto di osservazione in movimento lungo uno spigolo del prisma, riportato in Fig. 20 i valori del potenziale  $U(P)$  tracciato in funzione della distanza del punto  $P$ , allineato lungo l'asse  $x$ , dall'origine del riferimento in Fig. 20.

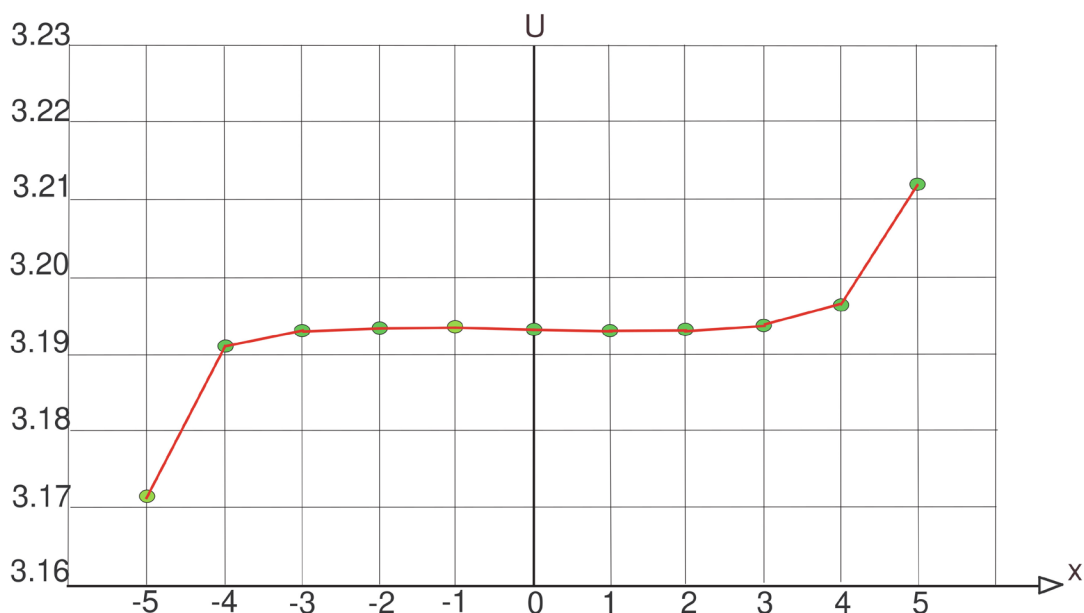


Figura 19 - Variazione del potenziale  $U$  quando il punto di osservazione si sposta simmetricamente lungo  $x$  rispetto a  $P_a$

La trama rende pienamente conto della continuità del potenziale quando  $P$  si muove lungo un bordo che attraversa l'origine del riferimento locale della faccia; circostanza non banale, poiché si verifica nonostante che il fattore di correzione  $\alpha_i$  è discontinuo intorno all'origine.

Riassumendo, nonostante i cambiamenti del valore di  $\alpha_i$ , da 0 quando  $P$  è fuori dal bordo 5–6, a  $\pi/2$  quando  $P \equiv 5$  e, infine, a  $\pi$  quando  $P$  si sposta all'interno del bordo, il potenziale mostra il comportamento continuo illustrato in Fig. 21. L'esempio numerico è stato ricalcolato dallo scrivente con un test utilizzando il codice Matlab® *R2021b* che ha fornito risultati privi di singolarità in occasione del calcolo della derivata seconda del potenziale.

## 7.2 Soluzioni analitiche e numeriche per il calcolo dell'anomalia di gravità di un corpo 2D

Gli esempi numerici trattati in questo paragrafo sono relativi ai casi affrontati in letteratura specializzata e verificati attraverso le formule illustrate nel capitolo 3, relative ai casi di anomalia di gravità prodotta da un corpo 2D con contrasto di densità dato da funzioni polinomiali, ampiamente documentati in [27].

Le formule relative sono state codificate in un programma Matlab<sup>®</sup> dall'autore al fine di verificarne la correttezza e la solidità.

In tutti gli esempi il contrasto di densità è espresso in grammi per centimetro cubo, le distanze sono espresse in chilometri, il valore della costante di gravità  $G$  vale  $6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ .

Per tutti gli esempi è stato effettuato il confronto fra i dati emersi e quelli presenti in letteratura, dedotti dai diagrammi originali in cui sono riportati in modo originale.

Per tutti gli esempi di seguito riportati l'autore ha elaborato delle tabelle in cui sono riportati i confronti tra i propri risultati e quelli già pubblicati in letteratura scientifica.

Il modello prova è stato testato sul caso trattato dapprima da Rao nel 1986 [44] e successivamente da Zhang nel 2001 [31], assumendo la densità data dalla seguente espressione:

$$\theta_z = 1.54 + 0.24z - 0.035z^2 \quad (7.1)$$

Il modello utilizzato è rappresentato in Fig. 22. Si tratta di un corpo bidimensionale cilindrico ad una profondità di 1 km, largo 6 km, alto 1 m.

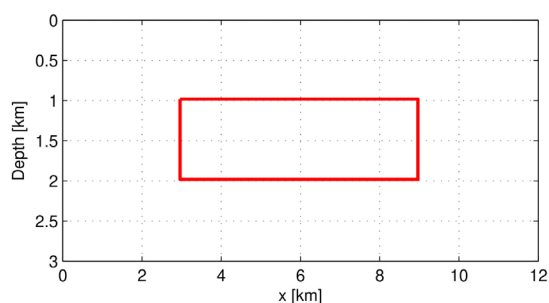


Figura 20 - Dominio rettangolare da Rao (1986)

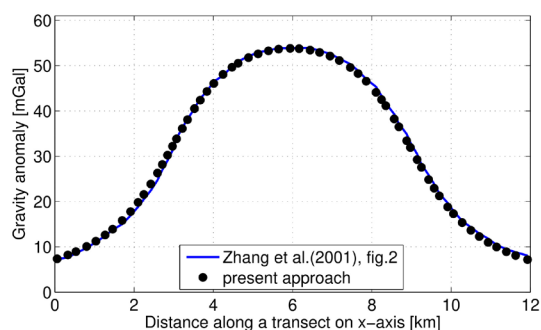


Figura 21 - Comparazione tra i risultati ottenuti con l'approccio presentato in D'Urso e quelli di Zhang et al. per il dominio di cui alla figura 22

Nella Fig. 23 viene mostrato come vi sia un perfetto allineamento tra la linea piena, che rappresenta i risultati ottenuti da Rao e Zhang, e la linea punteggiata derivata dai risultati dell'approccio numerico elaborato in D'Urso [27]. Ciascun punto rappresenta l'anomalia di gravità associata alla posizione del punto di osservazione che ha come coordinate  $z = 0$  e come ascissa  $x$  quella uguale al punto tracciato.

Nella Tabella 3 sono riportati i valori dell'anomalia di gravità calcolati con l'approccio di D'Urso e quelli derivati dai diagrammi di Zhang et al., di cui alla Fig. 23.

## Capitolo 7 – Esempi numerici

Ascisse [km]	g,z (present approach)	g,z (Zhang et al. (2001)) [mGal]
0,00	7,206	7,280
0,33	8,215	7,649
0,53	8,954	8,606
0,80	10,092	9,784
1,04	11,255	11,036
1,27	12,622	12,434
1,46	13,912	13,759
1,70	15,823	15,010
1,91	17,797	16,924
2,10	19,831	18,836
2,25	21,578	20,529
2,42	23,885	22,441
2,59	26,295	24,722
2,71	28,179	27,002
2,84	30,241	29,062
2,97	32,218	31,268
3,07	33,843	33,916
3,22	36,118	36,270
3,35	38,081	38,182
3,52	40,525	40,536
3,67	42,384	42,743
3,84	44,308	44,362
4,01	46,073	46,495
4,25	48,065	47,820
4,47	49,638	49,807
4,62	50,528	50,911
4,89	51,761	52,089
5,13	52,606	52,899
5,39	53,256	53,415
5,65	53,643	53,858
5,94	53,809	53,860
6,16	53,741	53,861
6,44	53,420	53,937
6,68	52,918	53,276
6,94	52,109	52,616
7,18	51,134	51,588
7,46	49,612	50,340
7,65	48,255	48,870
7,86	46,572	47,033
8,10	44,105	45,344
8,24	42,511	43,359
8,35	41,142	41,669
8,56	38,233	39,317
8,68	36,500	37,186
8,88	33,431	34,907
8,97	31,919	32,996
9,14	29,254	30,497
9,25	27,554	28,218
9,43	24,851	25,867
9,57	22,939	23,882
9,70	21,255	21,751
9,91	18,815	19,693
10,06	17,323	17,929
10,28	15,355	15,725
10,50	13,672	14,329
10,71	12,278	12,933
10,94	11,001	11,832
11,15	9,973	10,436
11,39	8,938	9,482
11,63	8,103	8,821
12,00	6,996	8,088

Tabella 3 - Valori numerici dell'anomalia di gravità di cui alle figure 22 e 23

Il secondo esempio, mostrato nella Fig. 24, riguarda il caso trattato in letteratura da Garcia - Abdeslem et al. [45] e poi trattato da Zhou [20], relativo ad un sito in Messico, in cui il contrasto di densità è stato assunto pari a:

$$\theta_z = -0.7 + 2.548 \times 10^{-4}z - 2.73 \times 10^{-8}z^2 \quad (7.2)$$

in cui  $z$  è misurato in metri.

Nella Fig. 25 è mostrato il confronto tra l'approccio di D'Urso e quello di Zhou (2008).

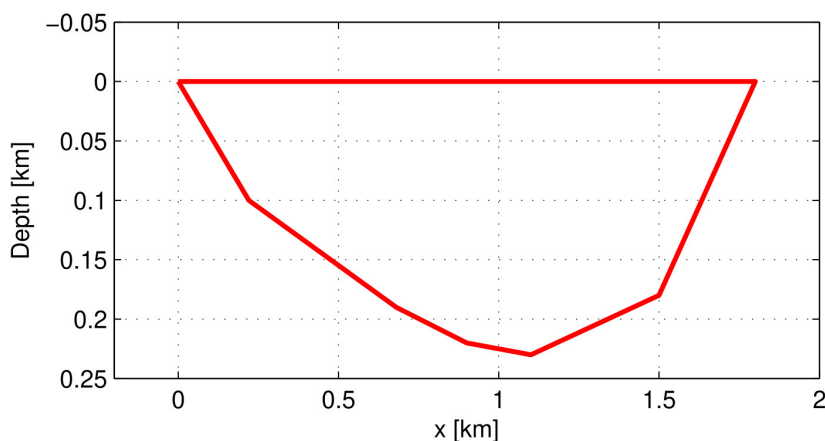


Figura 22 - Dominio tratto da Garcia – Abdeslem et al.

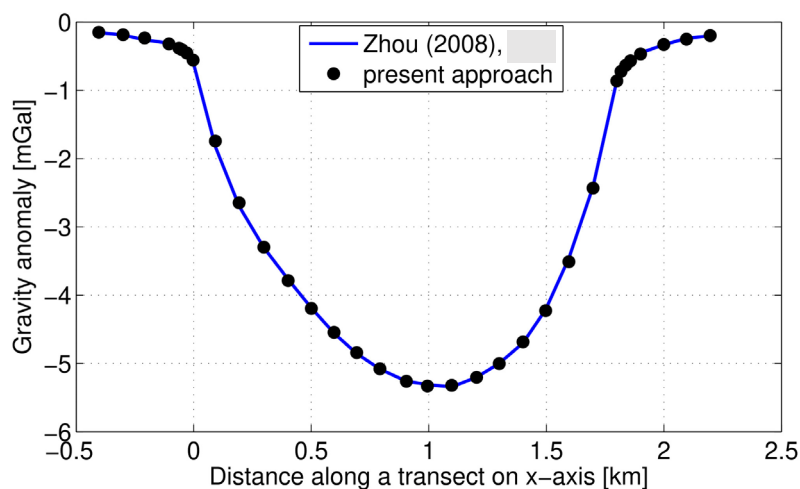


Figura 23 - Raffronto tra l'approccio di D'Urso e quello di Zhou

## Capitolo 7 – Esempi numerici

In questo caso il confronto è stato effettuato attraverso due distinte metodologie.

Nella Tab. 4 sono riportati i valori dell'anomalia di gravità calcolati con l'approccio di D'Urso e quelli derivati dal diagramma in Zhou et al.

Ascisse [km]	g,z (present approach)	g,z ( Zhou (2008),) [mGal]
-0,40	-0,150	-0,155
-0,30	-0,186	-0,191
-0,21	-0,233	-0,262
-0,11	-0,322	-0,310
-0,06	-0,382	-0,370
-0,05	-0,407	-0,394
-0,03	-0,454	-0,429
0,00	-0,557	-0,584
0,09	-1,743	-1,825
0,19	-2,647	-2,696
0,30	-3,297	-3,304
0,40	-3,787	-3,769
0,50	-4,195	-4,187
0,60	-4,545	-4,557
0,69	-4,841	-4,855
0,79	-5,078	-5,082
0,90	-5,260	-5,260
0,99	-5,331	-5,308
1,10	-5,320	-5,344
1,20	-5,203	-5,201
1,30	-5,002	-4,998
1,40	-4,684	-4,700
1,50	-4,226	-4,211
1,60	-3,511	-3,459
1,70	-2,432	-2,410
1,80	-0,863	-0,859
1,82	-0,724	-0,728
1,84	-0,634	-0,632
1,86	-0,568	-0,561
1,90	-0,468	-0,453
2,00	-0,330	-0,334
2,10	-0,252	-0,239
2,20	-0,199	-0,203

Tabella 4 - Valori numerici dell'anomalia di gravità di cui alle figure 24 e 25

Nell'esempio che segue viene analizzato un segmento di valle dapprima studiato da Murthy e Rao nel 1979 [46] e successivamente da Zhang et al. nel 2010 [31], quindi da Zhou nel 2008 [20].

Il contrasto di densità assunto alla base dei calcoli è:

$$\theta_z = -0.55 + 2 \times 10^{-4}z \quad (7.3)$$

La Fig. 26 illustra il dominio considerato. La Fig. 27 mostra il confronto tra i valori numerici ottenuti con la procedura di D'Urso [27].

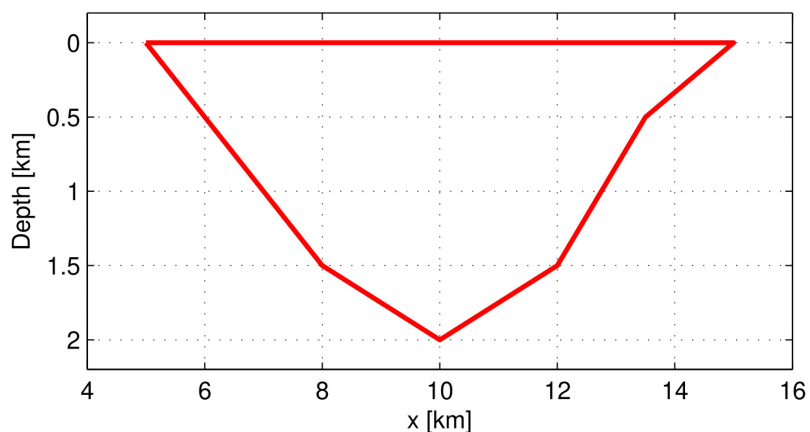


Figura 24 - Dominio da Murthy e Rao (1979)

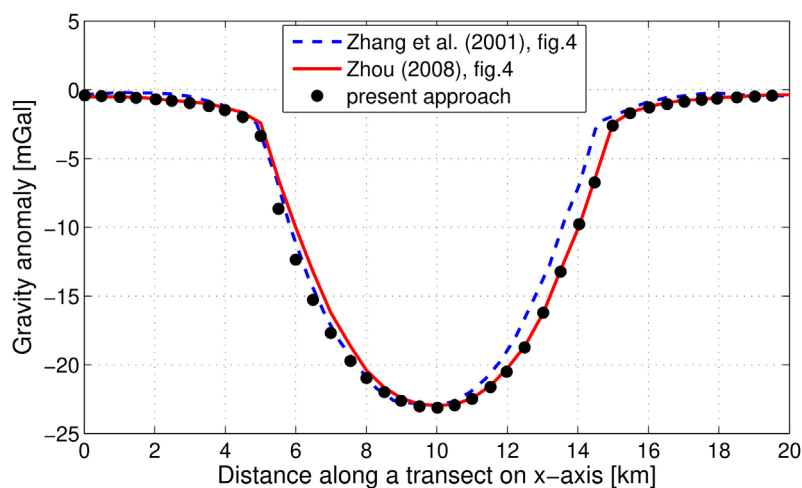


Figura 25 - Confronto fra i risultati di Zhang et al. (2001), Zhou (2008) e la citata procedura di D'Urso



## Capitolo 7 – Esempi numerici

Tabella 5 - Valori numerici dell'anomalia di gravità comparati a quelli di Zhou (2008) e Zhang (2010)

Ascisse [km]	g,z (present approach) [mGal]	g,z ( Zhou (2008)) [mGal]
0,02	-0,413	-0,513
0,49	-0,460	-0,512
1,02	-0,524	-0,511
1,47	-0,591	-0,556
2,03	-0,695	-0,648
2,49	-0,803	-0,787
2,99	-0,959	-0,879
3,54	-1,192	-1,018
3,99	-1,475	-1,297
4,50	-1,982	-1,669
5,01	-3,356	-2,414
5,51	-8,660	-6,517
6,00	-12,355	-10,014
6,49	-15,284	-13,231
6,99	-17,693	-16,215
7,55	-19,732	-18,639
8,01	-20,975	-20,410
8,51	-21,988	-21,669
8,99	-22,628	-22,414
9,51	-23,032	-22,879
10,02	-23,131	-22,971
10,51	-22,950	-22,877
11,00	-22,482	-22,456
11,53	-21,621	-21,522
11,98	-20,505	-20,308
12,49	-18,744	-18,674
13,02	-16,222	-16,248
13,51	-13,239	-13,122
14,04	-9,781	-9,902
14,48	-6,744	-6,543
14,99	-2,616	-2,484
15,48	-1,701	-1,643
16,02	-1,287	-1,222
16,53	-1,040	-0,941
17,02	-0,868	-0,753
17,51	-0,739	-0,705
17,95	-0,648	-0,564
18,51	-0,555	-0,517
19,02	-0,488	-0,422
19,51	-0,434	-0,374
20,03	-0,386	-0,373

L'esempio riportato di seguito è relativo al caso analizzato da Martín – Atienza e García – Abdeslem nel 1999 [47], da Zhou [21] [22], in cui il contrasto di densità è assunto pari a:

$$\theta_z = -0.55 + 2 \times 10^{-5}x - 2 \times 10^{-8}x^2 \quad (7.4)$$

e variabile lungo l'asse x.

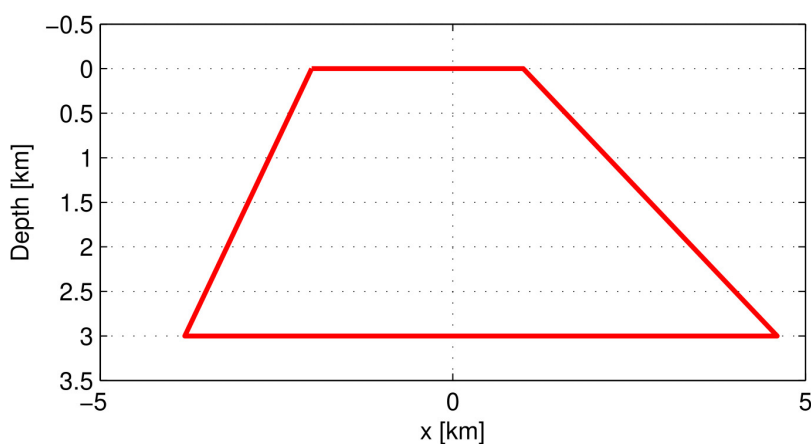


Figura 26 - Dominio tratto da Martín - Atienza e García - Abdeslem

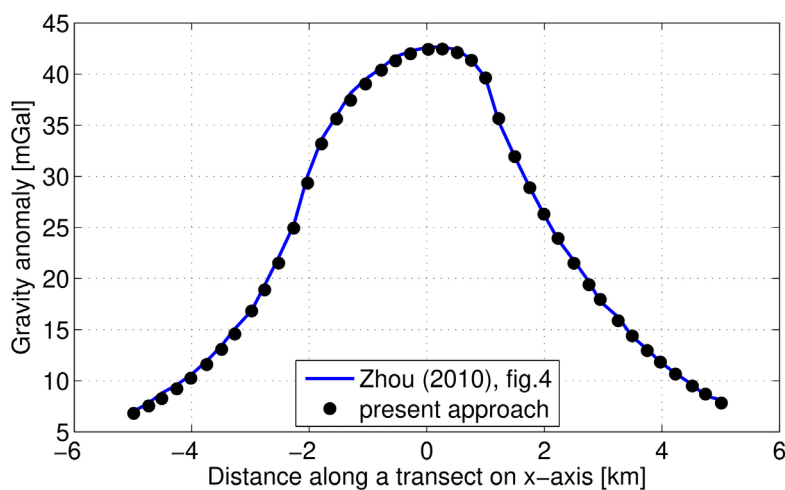


Figura 27 - Confronto tra i risultati dell'approccio di D'Urso e quelli di Zhou (2010)

Nelle Fig. 26 e 27 sono riportati rispettivamente il dominio e il grafico del confronto dei risultati della variazione di anomalia di gravità.

## Capitolo 7 – Esempi numerici

Nella tabella seguente sono indicati i valori numerici dedotti con l'approccio di D'Urso e quelli diagrammati da Zhou (2010).

*Tabella 6 - Valori numerici dell'anomalia di gravità in D'Urso e in Zhou (2010)*

<b>Ascisse [km]</b>	<b>g,z (present approach)</b>	<b>g,z ( Zhou 2010, [mGal]</b>
-4,99	6,804	7,005
-4,73	7,533	7,826
-4,51	8,261	8,784
-4,25	9,212	9,605
-4,01	10,239	10,563
-3,74	11,587	11,933
-3,49	13,068	13,441
-3,27	14,564	15,086
-2,98	16,820	16,868
-2,76	18,889	19,337
-2,52	21,502	22,081
-2,26	24,929	25,237
-2,03	29,326	30,042
-1,79	33,170	33,610
-1,53	35,616	35,941
-1,30	37,440	38,136
-1,04	39,031	39,506
-0,77	40,378	40,601
-0,53	41,290	41,697
-0,28	41,983	42,243
0,03	42,419	42,651
0,27	42,443	42,648
0,52	42,109	42,369
0,76	41,351	41,404
1,00	39,618	39,615
1,22	35,642	35,354
1,50	31,930	31,916
1,75	28,880	28,891
1,99	26,295	26,278
2,23	23,931	23,802
2,51	21,488	21,738
2,76	19,396	19,674
2,95	17,950	17,748
3,26	15,865	16,233
3,50	14,384	14,306
3,75	12,955	13,067
3,98	11,823	11,827
4,23	10,658	10,725
4,52	9,495	9,622
4,74	8,690	8,520
5,01	7,820	8,104

L'ulteriore esempio numerico si riferisce al caso dapprima studiato da Martin – Atienza e Garcia – Abdeslem nel 1999 [47], successivamente da Zhou nel 2009 [21], relativo ad uno strato sedimentario di sottosuolo in cui il contrasto di densità è dato dalla formula che segue:

$$\theta_{(x,z)} = -0.7 - 5 \times 10^{-8}xz + 4 \times 10^{-8}x^2 + 6 \times 10^{-8}z^2 \quad (7.5)$$

Il dominio analizzato è costituito da un poligono con 26 lati e l'anomalia di gravità è stata calcolata in 41 stazioni.

Le figure che seguono rappresentano il dominio e la sovrapposizione tra i risultati ottenuti con l'approccio di D'Urso e quello degli altri autori che hanno studiato il caso precedentemente.

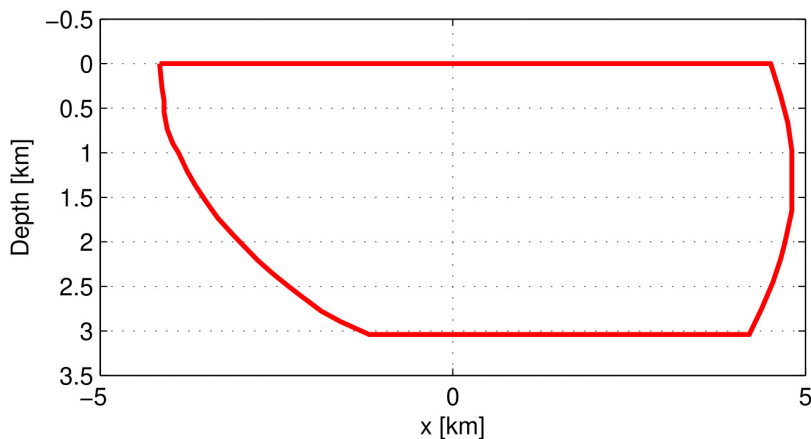


Figura 28 - Dominio derivato da Martin - Atienza e Garcia - Abdeslem (1999)

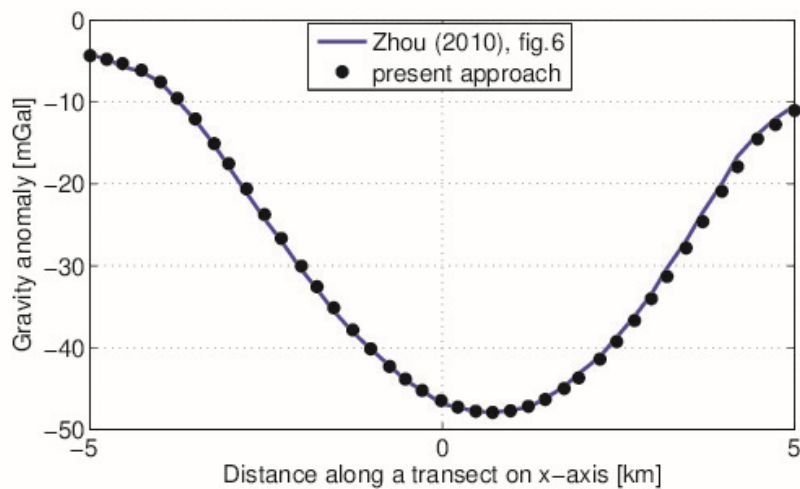


Figura 29 - Confronto tra i risultati ottenuti con l'approccio di D'Urso e quelli di Zhou (2010)

## Capitolo 7 – Esempi numerici

Nella tabella che segue sono indicati i valori dell'anomalia di gravità calcolati con l'approccio di D'Urso e quelli derivati dal diagramma in Zhou del 2010.

*Tabella 7 - Valori numerici dell'anomalia di gravità riferiti all'approccio di D'Urso e a quello di Zhou.*

Ascisse [km]	g,z (present approach)	g,z ( Zhou 2010) [mGal]
-5,00	-4,362	-4,286
-4,76	-4,814	-4,762
-4,54	-5,323	-5,714
-4,27	-6,136	-6,349
-4,00	-7,582	-7,619
-3,76	-9,554	-9,841
-3,51	-12,092	-12,222
-3,24	-15,103	-15,238
-3,03	-17,544	-17,937
-2,78	-20,635	-21,111
-2,52	-23,758	-24,286
-2,29	-26,660	-26,984
-2,00	-30,049	-30,476
-1,78	-32,574	-32,857
-1,54	-35,140	-35,556
-1,27	-37,836	-38,095
-1,02	-40,136	-40,159
-0,75	-42,296	-42,222
-0,52	-43,835	-43,968
-0,29	-45,228	-45,238
-0,02	-46,468	-46,825
0,22	-47,250	-47,302
0,48	-47,750	-47,778
0,71	-47,900	-47,937
0,97	-47,712	-47,619
1,22	-47,163	-47,302
1,46	-46,320	-46,191
1,73	-44,985	-44,762
1,94	-43,695	-43,175
2,24	-41,404	-41,111
2,48	-39,269	-38,730
2,73	-36,692	-36,191
2,97	-34,020	-33,492
3,19	-31,326	-30,318
3,46	-27,840	-26,984
3,70	-24,622	-23,492
3,97	-20,910	-20,000
4,19	-17,913	-16,667
4,48	-14,528	-13,968
4,73	-12,779	-12,064
5,00	-11,074	-10,476

In conclusione si può affermare che negli esempi analizzati e tratti dalla letteratura scientifica, l'anomalia di gravità è stata ottenuta in forma chiusa, in corrispondenza di punti arbitrari, nel caso di corpi bidimensionali di forma poligonale, con varie densità di contrasto rappresentate da diverse formule polinomiali.

L'anomalia viene espressa come somma delle quantità che dipendono solo dalle coordinate dei vertici del poligono e dai parametri che definiscono il contrasto di densità.

La procedura applicata da D'Urso si basa sull'applicazione generalizzata del teorema di Gauss e considera analiticamente la singolarità intrinseca degli integrali da calcolare.

Le formulazioni di D'Urso possono essere facilmente estese a contrasti di densità rappresentati da funzioni polinomiali di grado più alto.

Il codice di calcolo in Matlab<sup>®</sup> è stato abbondantemente testato su numerosi e impegnativi esempi trattati in letteratura scientifica.

### **7.2.1 Soluzioni analitiche e numeriche per il calcolo dell'anomalia di gravità per corpi poliedrici con contrasto di densità polinomiale**

Gli esempi numerici trattati in questo paragrafo sono relativi ai casi affrontati in letteratura specializzata e verificati attraverso le formule illustrate nel capitolo 4, relative ai casi di anomalia di gravità prodotta da un corpo poliedrico con contrasto di densità dato da funzioni polinomiali, ampiamente documentati da D'Urso in [35].

Le formule relative sono state codificate in un programma Matlab<sup>®</sup> dall'autore al fine di verificarne la correttezza e la solidità.

Il primo test indicato da D'Urso è relativo al caso già affrontato da Garcia – Abdeslem nel 2005 [48], riferito ad un prisma esteso per 10 km lungo x, per 20 km lungo y tra i piani per  $z = 0$  e  $z = 8$  km.

In tutti gli esempi, il contrasto di densità è espresso in unità di km per metro cubo, le distanze sono espresse in chilometri, il valore della costante di gravità G vale  $6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

Il contrasto di densità è dato dalla seguente funzione polinomiale:

$$\Delta\rho_{(z)} = -747.7 + 203.43z - 26.764z^2 + 1.4247z^3 = p + qz + rz^2 + sz^3 \quad (7.6)$$

Per effettuare il confronto dei risultati con quelli di Garcia – Abdeslem [48], D’Urso ha calcolato l’anomalia di gravità nei punti P che hanno il valore di  $y = 15$  km,  $z = -0,15$  m e  $x$  variabile tra 0 fino a 30 km.

Garcia – Abdeslem hanno collocato il loro punto di osservazione a -15 cm dalla sommità del prisma per evitare singolarità nelle soluzioni analitiche quando il punto di osservazione e l’origine del sistema di coordinate coincidono.

Invece, l’approccio di D’Urso è privo di singolarità. Sono stati pertanto ripetuti i calcoli di Garcia – Abdeslem con il programma implementato in Matlab, appurando che i dati analitici plottati dai predetti autori contengono errori nei valori dell’anomalia di gravità poiché derivano dal calcolo di integrali con limiti di integrazione errati.

I valori numerici corretti sono riportati nelle figure che seguono, per casi separati delle quantità numeriche che compaiono nella funzione polinomiale del contrasto di densità.

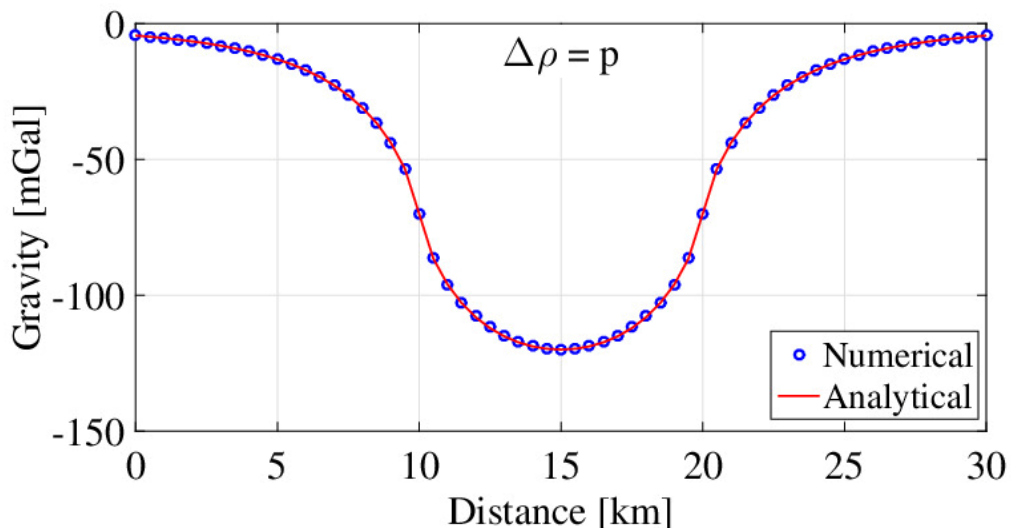


Figura 30 - Valori di gravità per il termine costante contenuto nella formula (7.6)

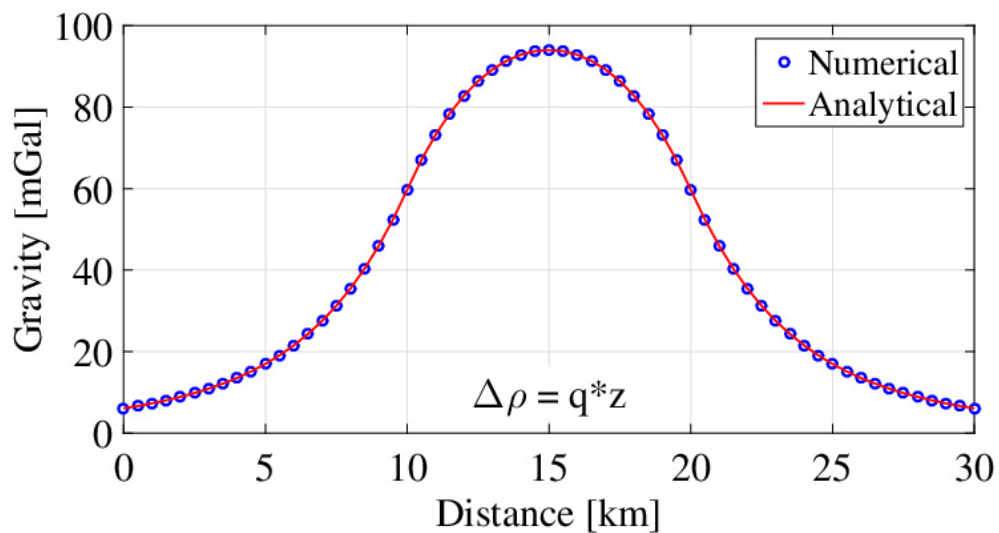


Figura 31 - Valori di gravità per il termine lineare della formula (7.6)

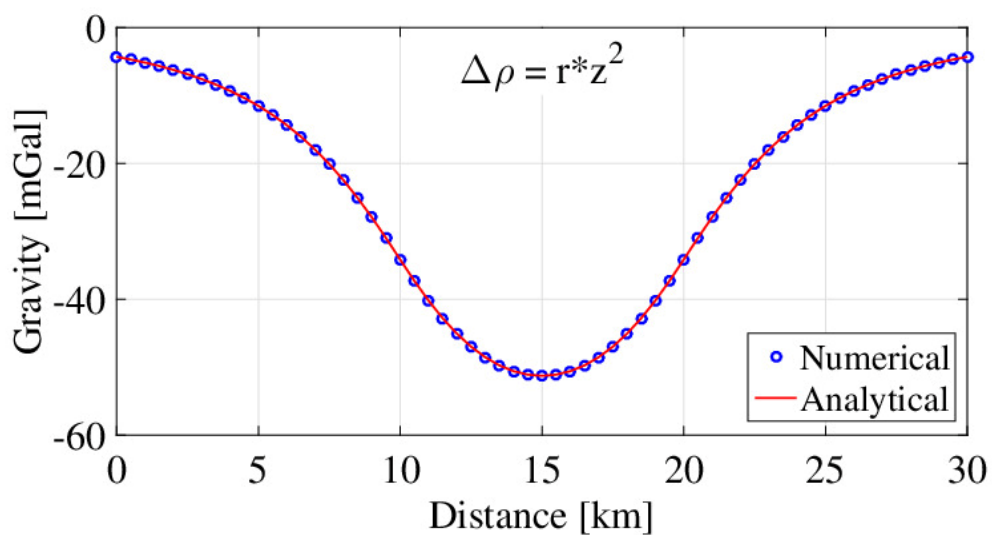


Figura 32 - Valori di gravità per il termine quadratico contenuto in (7.6)



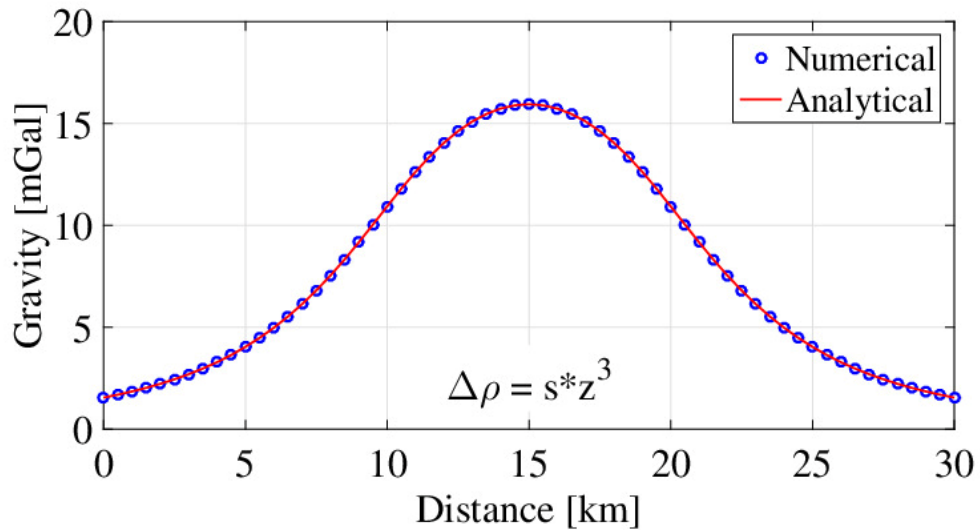


Figura 33 - Valori di gravità riferiti al termine cubico contenuto nella formula (7.6)

La correttezza dei valori numerici ottenuti da D'Urso sono stati ottenuti con procedure implementate in Matlab® con l'aiuto di procedura di quadratura adattativa.

L'attrazione gravitazionale è stata determinata nel punto  $P = [0,30] \times 15 \times (-0.00015)$  associato al prisma  $\Omega = [10, 20] \times [10, 20] \times [0,8]$  chilometri.

Le differenze tra valori analitici e numerici riscontrati sono riportate graficamente nelle figure che seguono.

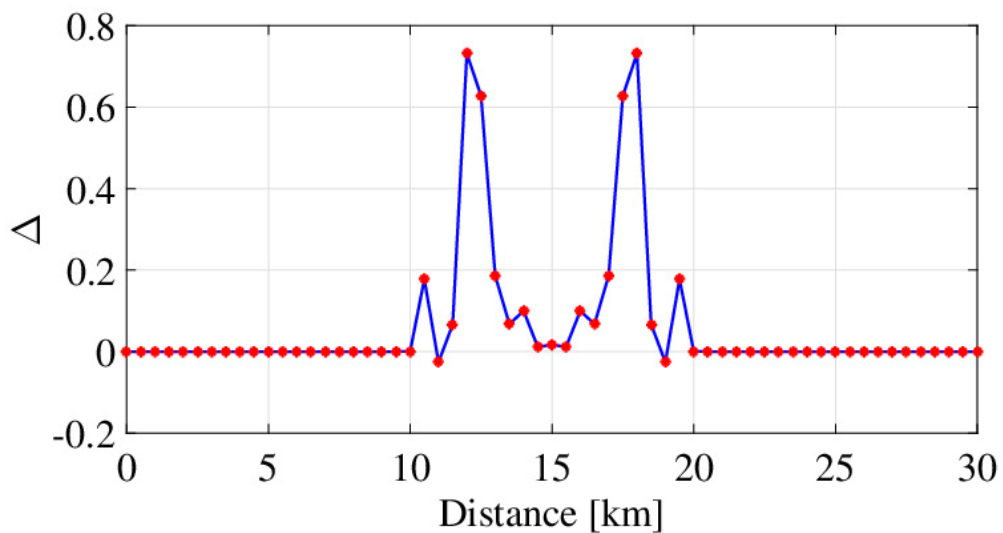


Figura 34 - Differenze tra valori analitici e numerici per il termine costante

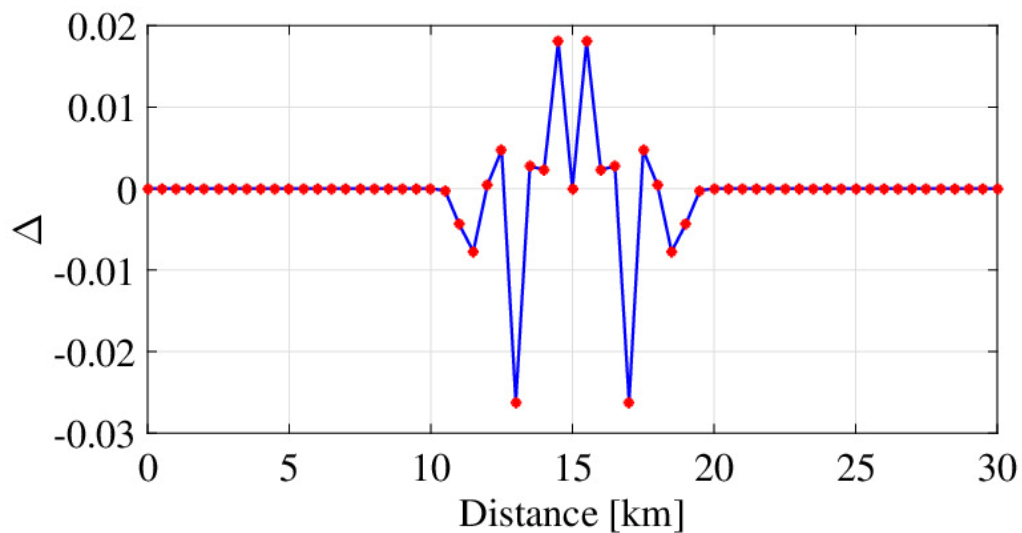


Figura 35 - Differenza tra i valori analitici e numerici per il termine lineare

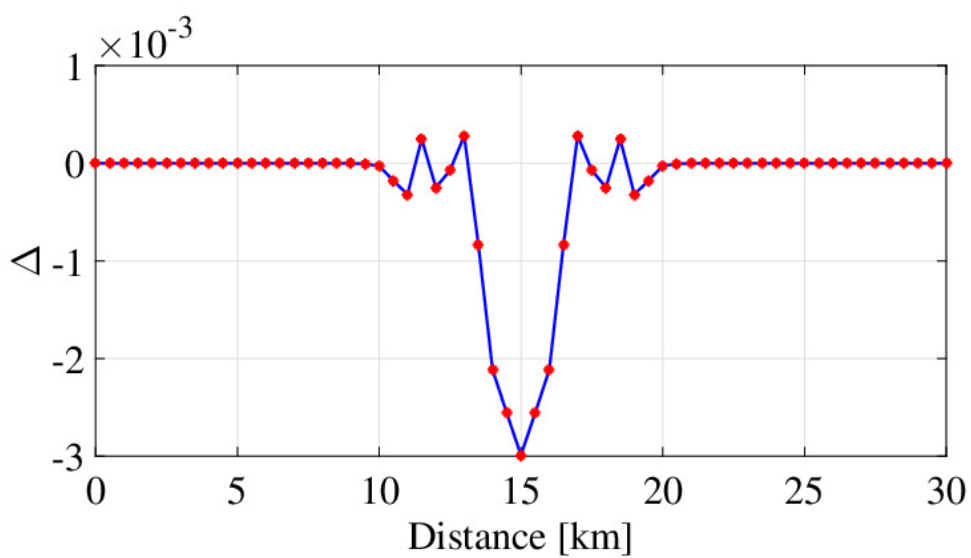


Figura 36 - Differenze tra i valori analitici e numerici per il termine quadratico

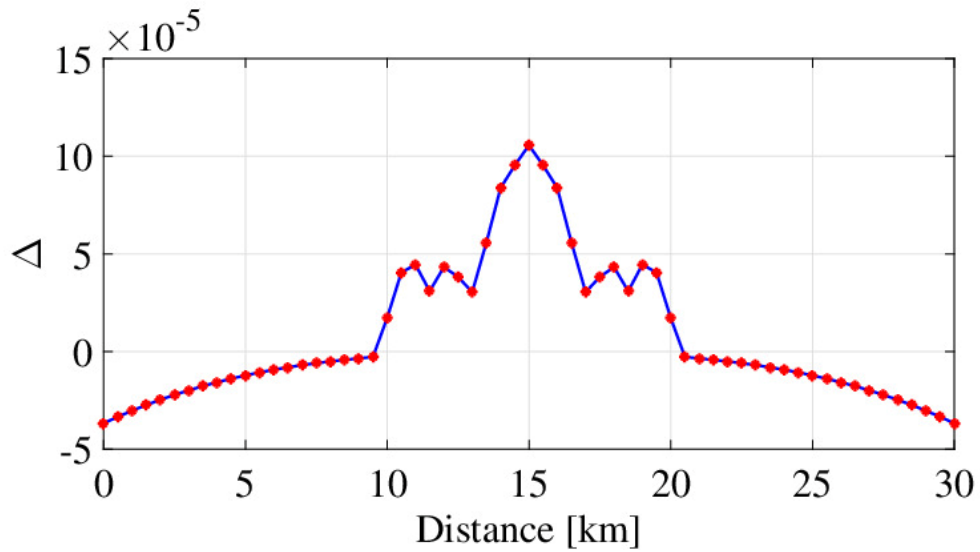


Figura 37 - Differenze tra valori analitici e numerici per il termine al cubo del contrasto di densità

Per testare pienamente la formulazione proposta e la concretezza della implementazione rilevante del codice in Matlab, l'autore [35] ha sistematicamente condotto un confronto tra i risultati associati alle valutazioni analitiche e numeriche degli integrali coinvolti nel calcolo dell'anomalia di gravità.

A tale scopo, sulla base dell'esempio condotto da Garcia-Asdeslem [45], D'Urso, al fine di enfatizzare la indipendenza delle soluzioni da singolarità, ha valutato l'anomalia in  $z = 0$  e per diversi valori di  $y$ , più specificamente per  $y = 10$  km,  $y = 11$  km,  $y = 12,5$  km e  $y = 15$  km. L'anomalia di gravità è stata valutata in un intervallo della coordinata  $x$  pari a  $[0, 30]$  km. I valori dell'anomalia di gravità sono riportati in Fig. 38, 39, 40 e 41, mentre i risultati analitici sono elencati nella tabella seguente.

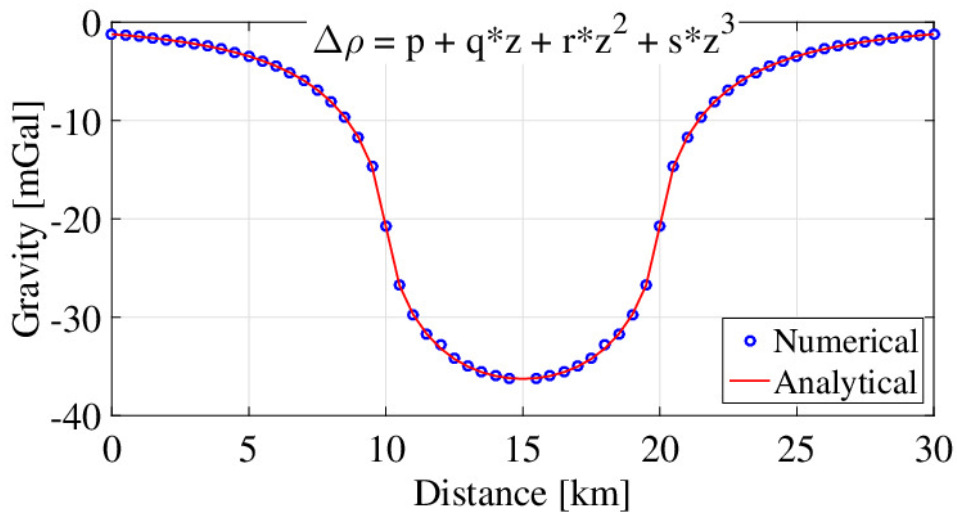


Figura 38 - Gravità a  $y = 10$  km

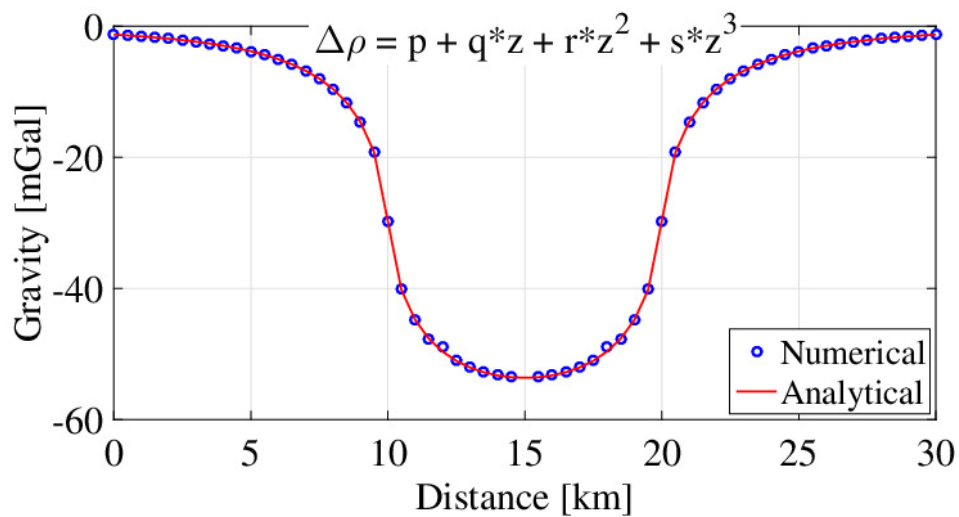


Figura 39 - Gravità a  $y = 11$  km

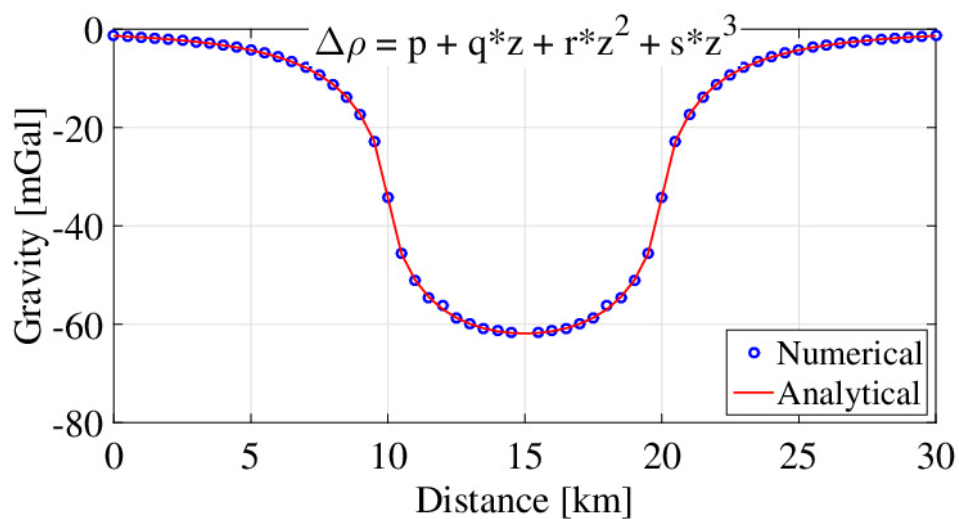


Figura 40 - Gravità a  $y = 12,5$  km

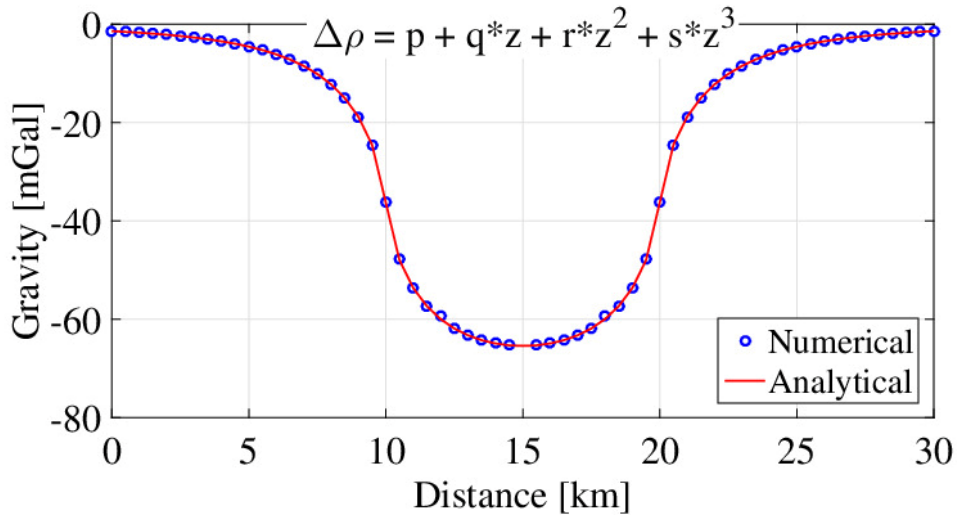


Figura 41 - Gravità a  $y = 15$  km

Infatti, per completezza i risultati analitici sono stati inseriti in una tabella e confrontati con quelli numerici ottenuti da Garcia-Asdeslem [45] utilizzando la loro formula di integrazione.

x (km)	000	500	1000	1500	2000	2500	3000	CT
$z=0$ e $y=10$ km								
a)	-1.22163576397609	-3.46372618679431	-20.7412785817980	-36.2650788733413	-20.7412785817980	-3.46372618679432	-1.22163576397614	1.9813
b)	-1.22163576397627	-3.46372618679431	-20.7413498102378	NaN	-20.7413498102377	-3.46372618679431	-1.22163576397627	143.4464
$z=0$ e $y=11$ km								
a)	-1.28698607331256	-3.82357120782405	-29.72909079760424	-53.62521739346171	-29.72909079760428	-3.82357120782429	-1.28698607331263	1.8574
b)	-1.28698607331254	-3.82357120782415	-29.72928645482153	NaN	-29.72928645482145	-3.82357120782415	-1.28698607331254	154.6723
$z=0$ e $y=12,5$ km								
a)	-1.36376684444623	-4.25957137389371	-34.23229607059629	-61.88280073665107	-34.23229607059632	-4.25957137389369	-1.36376684444629	1.894
b)	-1.36376684444609	-4.25957137389370	-34.23243794205016	NaN	-34.23243794205009	-4.25957137389370	-1.36376684444609	142.5479
$z=0$ e $y=15$ km								
a)	-1.41650677516557	-4.56182411878455	-36.2650788733413	-65.4288804280923	-36.2650788733413	-4.56182411878455	-1.41650677516557	1.9127
b)	-1.41650677516342	-4.56182411878455	-36.2652685757159	NaN	-36.2652685757159	-4.56182411878455	-1.41650677516557	156.1096

Tabella 8 - Anomalie gravitazionali (mGal) associate ad un prisma  $\Omega$  [(10,20) x [10,20) x [0,8] (dimensioni in chilometri e densità) in diverse posizioni; confronto fra valori analitici a) e numerici b). Tempo di calcolo misurato in secondi

Le differenze tra i predetti valori sono state graficizzate e riportate anche nelle figure seguenti.

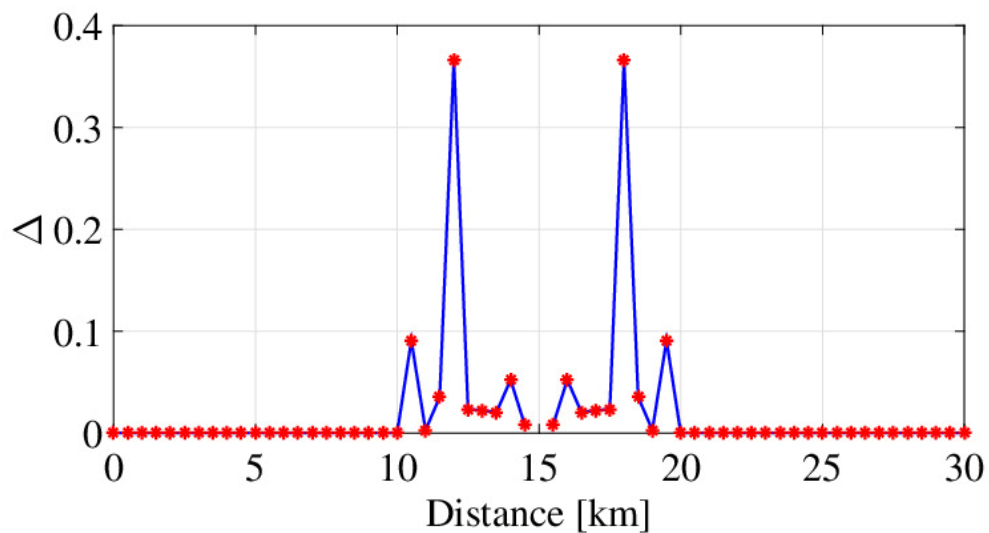


Figura 42 - Differenze  $\Delta$  tra valori analitici e numerici per  $y = 10$  km, si veda la figura 38

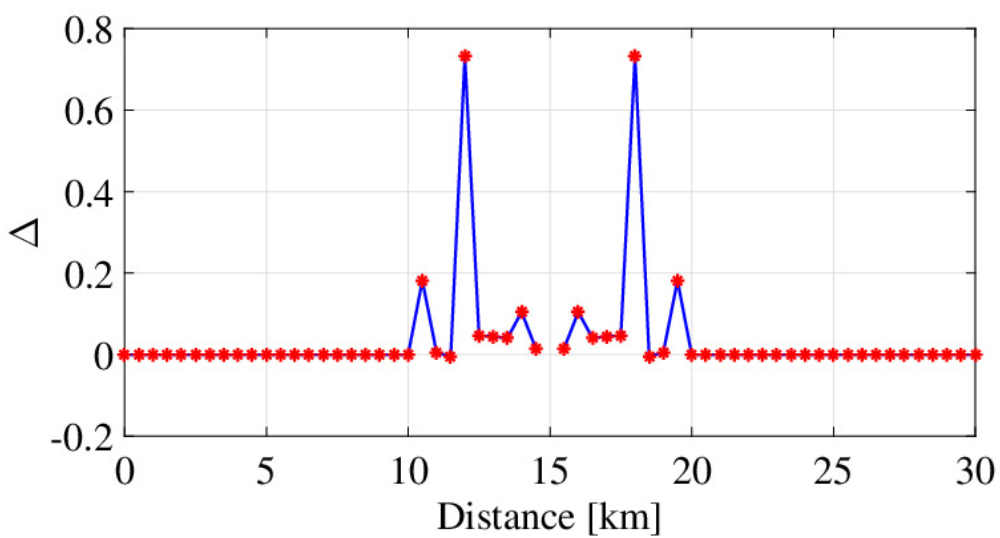


Figura 43 - Differenze  $\Delta$  tra valori analitici e numerici per  $y = 11$  km, si veda la figura 39

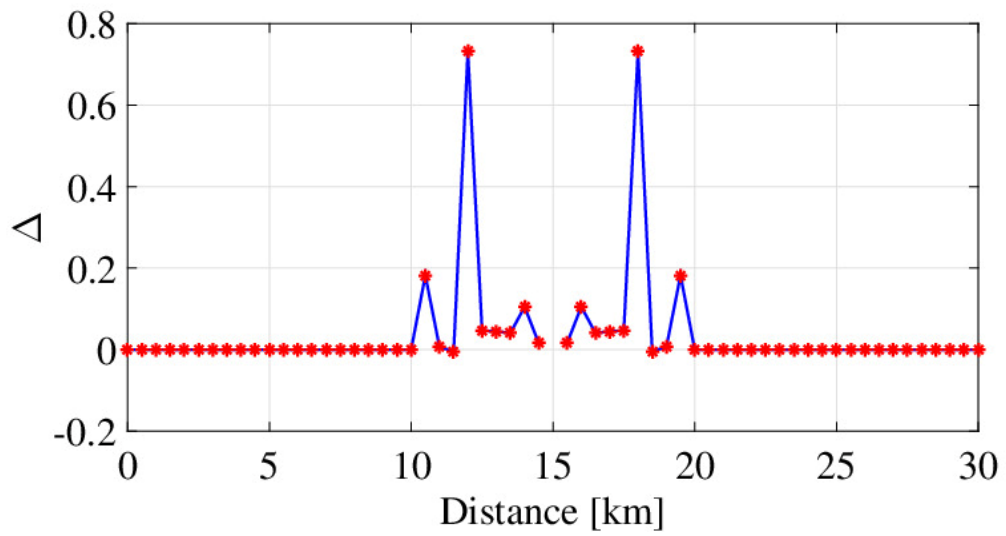


Figura 44 - Differenze  $\Delta$  tra valori analitici e numerici per  $y = 12,5$  km, si veda la figura 40

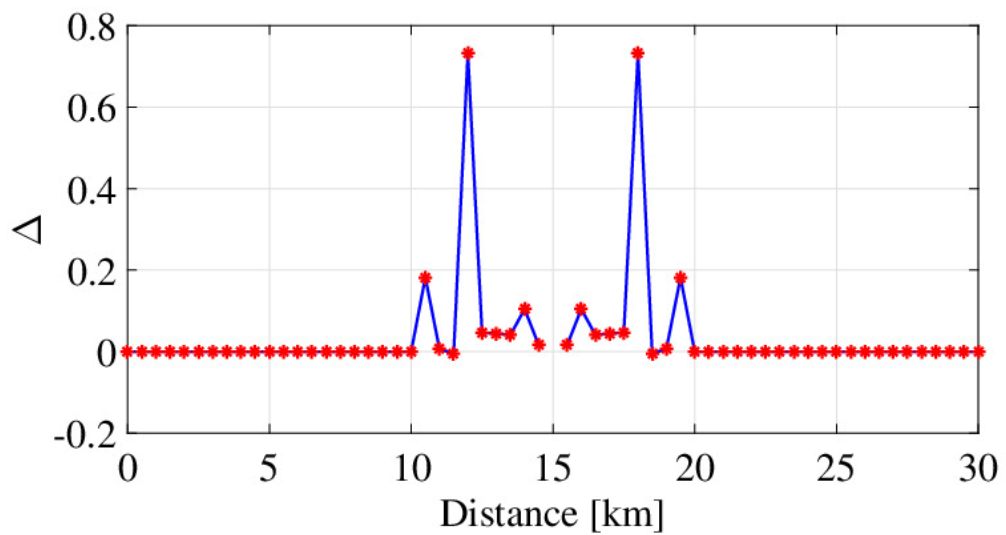


Figura 45 - Differenze  $\Delta$  tra valori analitici e numerici per  $y = 15$  km, si veda la figura 41

La verifica della natura simmetrica della soluzione è stata graficizzata rispetto ai piani  $x = 15$  km e  $y = 15$  km; le figure che seguono mostrano i contorni graficizzati dell'anomalia di gravità per  $z = 0$ , in corrispondenza di contrasto di densità di cui alla formula (49) e nel caso in cui la stessa formula dipenda anche da una variazione di densità in direzione orizzontale [30]:

$$\Delta\rho_{(z)} = -747.7 + 203.43z - 26.764z^2 + 1.4247z^3 - 23.205x$$

(7. 7).

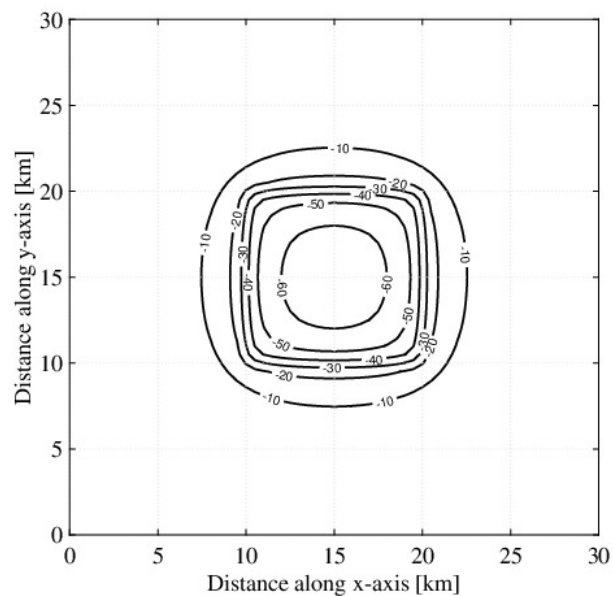


Figura 46 - Anomalia di gravità a  $z = 0$  con densità di cui alla formula (7.6)



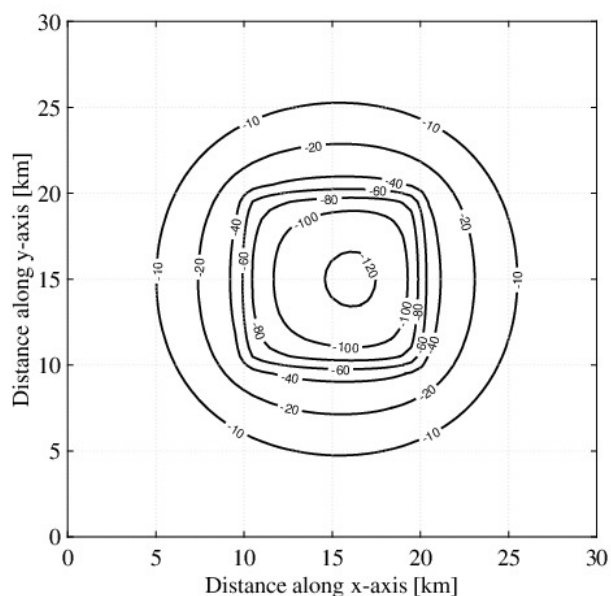


Figura 47 - Anomalia di gravità a  $z = 0$  con densità di cui alla formula (7.7)

La Figura 47 mostra come, in dipendenza di una variazione orizzontale del contrasto di densità, (si veda la formula (7.7)), la distribuzione superficiale dell'anomalia di gravità divenga asimmetrica.

A tal proposito, la dipendenza delle soluzioni in termini di variazione della superficie di distribuzione dell'anomalia di gravità può essere riscontrata anche nelle figure seguenti, Fig. 48 e 49, in corrispondenza di espressioni diverse di contrasti di densità, formule (7.8) e (7.9):

$$\Delta\rho_{(z)} = -747.7 + 203.43z - 26.764z^2 + 1.4247z^3 - 23.205y \quad (7.8)$$

$$\Delta\rho_{(z)} = -747.7 + 203.43z - 26.764z^2 + 1.4247z^3 - 23.205x - 23.205y \quad (7.9)$$

## Capitolo 7 – Esempi numerici

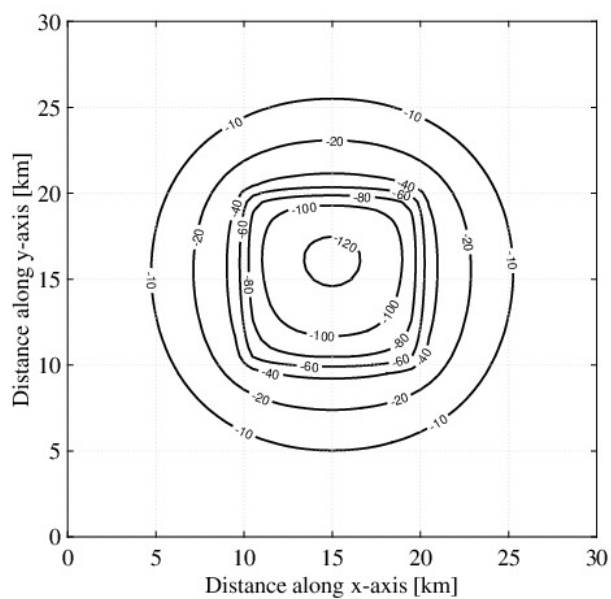


Figura 48 - Distribuzione dell'anomalia di gravità con densità di cui alla formula (7.8)

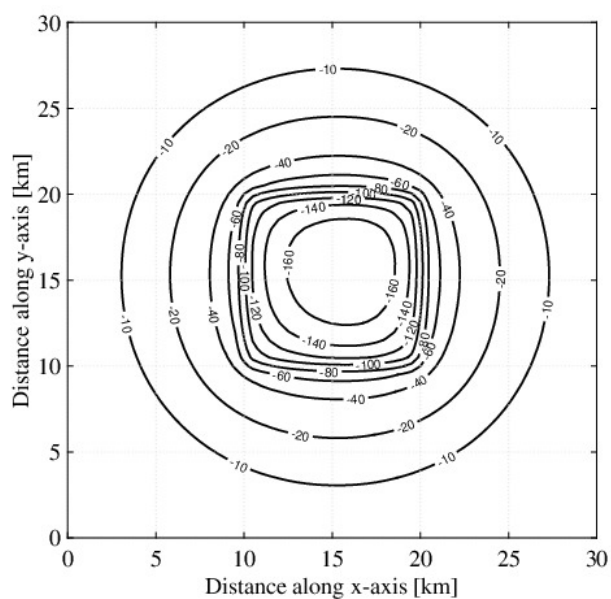


Figura 49 - Distribuzione dell'anomalia di gravità con densità di cui alla formula (7.9)

È del tutto evidente come l'anomalia di gravità svanisca meno rapidamente che nella Figura 47.

In conclusione si può affermare che negli esempi analizzati e tratti dalla letteratura scientifica, l'anomalia di gravità in punti arbitrari di osservazione per un corpo

poliedrico e caratterizzato da un contrasto di densità in forma polinomiale è stata ottenuta in forma chiusa

L'anomalia viene espressa come somma delle quantità che dipendono solo dalle coordinate 3D dei vertici del poligono e dai parametri che definiscono il contrasto di densità.

La procedura elaborata da D'Urso si basa sull'applicazione generalizzata del teorema di Gauss e considera analiticamente la singolarità intrinseca degli integrali da calcolare. Ciò significa che non appaiono singolarità sia nell'espressione analitica dell'anomalia di gravità sia nella sua controparte algebrica.

Le formulazioni di D'Urso possono essere facilmente estese a contrasti di densità rappresentati da funzioni polinomiali di grado più alto del terzo, come quello utilizzato negli esempi numerici condotti.

Il codice di calcolo in Matlab<sup>®</sup> è stato abbondantemente testato su numerosi e impegnativi esempi già trattati in letteratura scientifica.

# Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

## 8.1 Valutazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM a densità costante

La valutazione degli effetti della gravità per corpi a forma di poliedri, come trattato nel capitolo 4, viene affrontata attraverso due successive applicazioni del teorema generalizzato di Gauss per risolvere sistematicamente le singolarità che riguardano il calcolo degli effetti della gravità.

Il potenziale gravitazionale e le sue derivate di primo e secondo ordine vengono ridotte ad integrali monodimensionali estesi al generico lato del poliedro.

L'efficienza delle formule proposte risiede nella capacità di valutare correttamente le singolarità che si presentano nei casi in cui i punti attratti occupano i vertici della massa attrahente, i prolungamenti dei lati della frontiera e, infine, le facce degli elementi del DTM.

I risultati ottenuti dalla modellazione delle masse del terreno come poliedri con superfici lineari in sommità, mediante la formulazione proposta, vengono confrontati con risultati alternativi basati su una modellazione del terreno mediante poliedri con approssimazione bilineare della superficie di sommità oppure su approcci numerici.

Per quanto concerne la valutazione del campo gravitazionale determinato da una distribuzione di masse definita attraverso un campione di altezze relative ad un modello digitale del terreno, esistono metodi analitici, numerici e misti.

La scelta tra i vari metodi è determinata principalmente dall'accuratezza dei risultati e dai tempi di calcolo.

I metodi analitici sono di gran lunga superiori, in termini di precisione, rispetto a quelli numerici; tuttavia questi ultimi risultano essere più performanti per ciò che riguarda i tempi di calcolo.

Nelle applicazioni in cui il calcolo degli effetti gravitazionali (potenziale della gravità, riduzione del campo di gravità, calcolo del geoide) è relativo a tutti i punti di

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

una griglia del DTM, l'impiego di metodi analitici diventa gravoso dal punto di vista computazionale.

Questo aspetto ha portato alla ideazione dei cosiddetti metodi combinati o semi-analitici [49] (Tsoulis D.) che cercano di coniugare l'accuratezza dei metodi analitici con l'efficienza di quelli numerici.

I metodi analitici ipotizzano il DTM diviso in "elementi finiti" di densità costante, in un numero prefissato di corpi regolari, i cui effetti gravitazionali, espressi da integrali di volume, possano essere valutati analiticamente. Pertanto gli integrali verranno calcolati attraverso la somma degli effetti degli elementi che formano la distribuzione delle masse. I domini che permettono di valutare analiticamente gli effetti della gravità in forma chiusa, con idonea applicazione del teorema di Gauss, sono rappresentati da forme poliedriche.

L'impiego di approcci analitici, come riscontrato in letteratura, conduce al calcolo degli effetti della gravità in punti singolari. Tali punti, considerato un punto attratto e una massa attraente (Figura 50), sono localizzati nei vertici, lungo i bordi o lungo i loro prolungamenti e, infine, sulla faccia del corpo attraente (Figura 51).

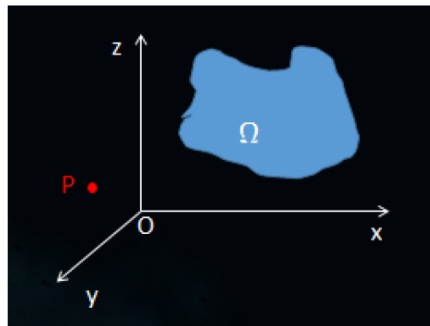


Figura 50 - Punto attratto P e massa attraente  $\Omega$

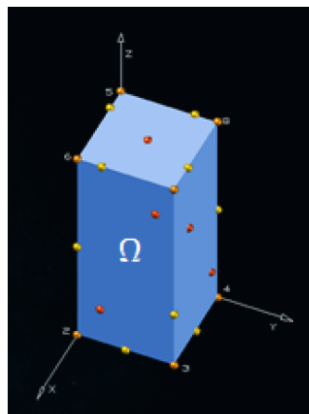


Figura 51 - Punti singolari

Il lavoro elaborato ha seguito un approccio basato sulla "Teoria delle Distribuzioni", modello matematico che permette di identificare e risolvere le singolarità, con-

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

siderando un fattore correttivo che si ottiene da una doppia applicazione del teorema di Gauss. Esso trasforma dapprima gli integrali di volume in integrali di superficie e, successivamente, trasforma gli integrali 2D, estesi ad una generica faccia della massa poliedrica, in integrali ad una dimensione.

I test numerici condotti su un DTM di un'area in prossimità del territorio del centro del Comune di Cassino (FR) (Figura 52), nella zona sud del comune, oltre a fornire valori esatti del potenziale e dell'attrazione gravitazionale, forniscono anche risultati computazionali più veloci degli approcci alternativi [50].

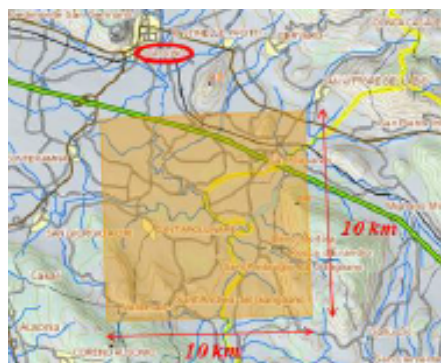


Figura 52 - DTM Cassino sud

I punti che costituiscono la griglia sono definiti da coordinate cartografiche (E, N, H), espresse in metri nel sistema di riferimento geodetico ED50, datum originale dei dati. Il sistema geodetico ED50 viene utilizzato per la definizione delle coordinate piane U.T.M.-ED50, e per il taglio (suddivisione in fogli) della cartografia IGM di nuova produzione e di quella regionale. Tali coordinate vengono fornite dall'IGM in formato ASCII.

Per il calcolo, la modellazione del terreno è eseguita sia attraverso uno schema prismatico (Figura 53a) composto da sei facce rettangolari, sia con schema poliedrico (Figura 53b) con 12 facce triangolari, inoltre si assume il sistema di riferimento OXYZ, con la coordinata X coincidente con quella Est, la coordinata Y con la Nord e la coordinata Z con la quota.

Per entrambe le modellazioni è stato implementato un algoritmo in ambiente Matlab, per il calcolo degli effetti gravitazionali, definendo la costante gravitazionale  $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ , la densità terrestre, per ipotesi considerata costante, pari a  $\delta_0 = 2.670 kg m^{-3}$ , la dimensione della griglia lato-maglia = 20 m (passo della griglia) e le coordinate del punto attratto dalla massa del DTM, che vengono di volta in volta variate nei test numerici.

Dal file in formato ASCII vengono ricavate le coordinate dei 250000 punti del DTM in esame e per entrambe le modellazioni, i vertici dei prismi e dei poliedri sono stati considerati coincidenti con i nodi della griglia, con la differenza che presentano entrambi numero di facce diverse come mostrato in Figura 53.

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

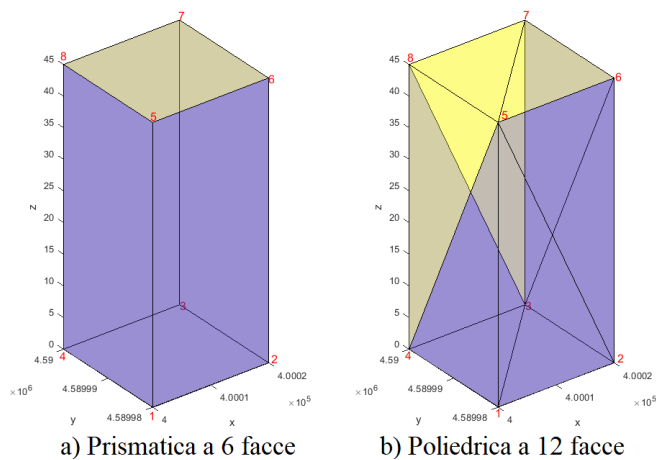


Figura 53 - Tipologia di modellazione

Il calcolo degli effetti gravitazionali per entrambe le modellazioni, è stato effettuato su n. 20 punti attratti, caratterizzati da determinate coordinate, (Tabella 9 e Figura 54).

Tabella 9 - Coordinate dei 20 punti attratti

Punto	x	y	z
<b>P1</b>	400000	4589980	0
<b>P2</b>	400000	4584980	0
<b>P3</b>	400000	4580000	0
<b>P4</b>	400000	4580000	32
<b>P5</b>	409980	4580000	0
<b>P6</b>	409980	4584980	450
<b>P7</b>	409980	4589980	0
<b>P8</b>	405000	4589980	83
<b>P9</b>	405000	4584980	39
<b>P10</b>	400000	4589980	45
<b>P11</b>	400000	4580000	345
<b>P12</b>	409980	4580000	433
<b>P13</b>	409980	4589980	100
<b>P14</b>	406700	4587680	129
<b>P15</b>	409240	4581200	517
<b>P16</b>	400720	4581000	408
<b>P17</b>	402280	4587852	40
<b>P18</b>	402307	4584780	8
<b>P19</b>	404420	4581550	60
<b>P20</b>	406675	4584360	17

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

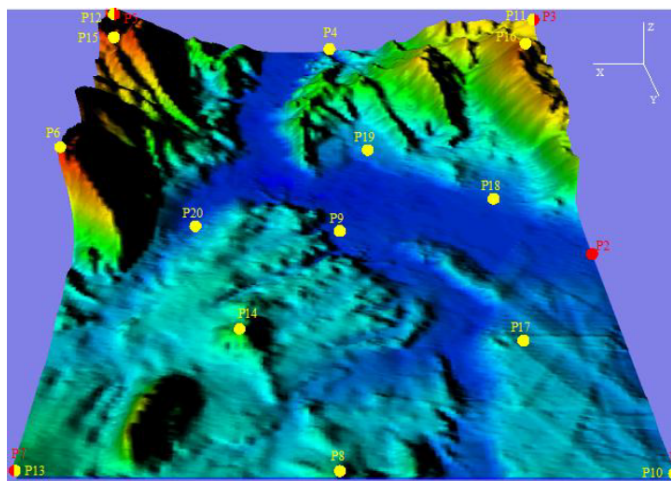


Figura 54 - Posizione dei punti attratti sul DTM di Cassino sud

Nella Figura 54 i cerchi in rosso caratterizzano i punti attratti a quota zero, i cerchi in giallo punti con quota coincidente a quella del DTM e quelli con doppio colore giallo/rosso coincidono planimetricamente con le coordinate del DTM ma presentano quota diversa.

Il DTM che ricopre un'area di 10 km x 10 km, considerando un passo di 20 metri sia nella direzione dell'asse x che nella direzione dell'asse y (ovvero E e N), è stato discretizzato in 250000 prismi o poliedri.

Al variare dei punti attratti, definiti nella Tabella 9, rispetto alle masse attraenti rappresentate da tutti i prismi o poliedri che si formano sui 250000 punti che costituiscono il DTM, ogni test calcola il potenziale ed il suo gradiente verticale.

Seguendo l'approccio per le due diverse modellazioni, prismi e poliedri, i valori del potenziale sono riportati nella tabella seguente (Tabella 10). Dai risultati si evince che la differenza tra le due modellazioni è stata pressoché nulla, ossia dell'ordine di  $10^{-12} - 10^{-14}$ ; inoltre, anche per i valori della derivata prima del potenziale riportati nella tabella (Tabella 11), si osserva che i risultati presentano delle differenze tra le due modellazioni nulle, dell'ordine di  $10^{-14} - 10^{-17}$ .

Per quanto riguarda i valori del potenziale calcolato sull'intero DTM, i valori maggiori sono stati ottenuti proprio in corrispondenza dei punti a quota maggiore.

I tempi di calcolo per la modellazione degli elementi DTM prismatici sono inferiori di circa 1,5 volte quelli necessari per la modellazione poliedrica.



Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

Tabella 10 - Valori del Potenziale per densità costante e differenza tra modellazione prismatica e poliedrica

<b>Punto</b>	<b>Uprismi (A) [<math>m^2/s^2</math>]</b>	<b>Upoliedri (B) [<math>m^2/s^2</math>]</b>	<b>A - B [<math>m^2/s^2</math>]</b>
<b>P1</b>	0,2249656023052	0,2249656023029	2,27301511E-12
<b>P2</b>	0,3452817352857	0,3452817352841	1,59000590E-12
<b>P3</b>	0,4112902659790	0,4112902659781	9,60009849E-13
<b>P4</b>	0,3957940693468	0,3957940693464	4,19997370E-13
<b>P5</b>	0,4375471123664	0,4375471123659	4,98046049E-13
<b>P6</b>	0,5435182037856	0,5435182037924	-6,79800660E-12
<b>P7</b>	0,2707507871322	0,2707507871332	-1,01002540E-12
<b>P8</b>	0,3092953423160	0,3092953423161	-2,79776202E-14
<b>P9</b>	0,4299239526042	0,4299239526037	4,55024907E-13
<b>P10</b>	0,2249666989167	0,2249666989145	2,17501017E-12
<b>P11</b>	0,4092758486353	0,4092758486346	7,86981591E-13
<b>P12</b>	0,4349287352645	0,4349287352647	-1,82964754E-13
<b>P13</b>	0,2706858110161	0,2706858110175	-1,39499523E-12
<b>P14</b>	0,4342518592824	0,4342518592823	7,89923682E-14
<b>P15</b>	0,6513545355220	0,6513545355218	1,91957561E-13
<b>P16</b>	0,6261579199526	0,6261579199532	-5,42010881E-13
<b>P17</b>	0,3475921275315	0,3475921275306	8,66029470E-13
<b>P18</b>	0,4115009108499	0,4115009108487	1,24000810E-12
<b>P19</b>	0,5333225842480	0,5333225842467	1,35202960E-12
<b>P20</b>	0,4626401008262	0,4626401008252	9,75997061E-13

L'esempio appena illustrato e documentato è relativo all'applicazione del metodo analitico ad un caso reale, ai fini del calcolo degli effetti della gravità in determinati punti della superficie terrestre.

In particolare sono state prese in esame sia la modellazione prismatica che quella poliedrica, per elementi di un modello digitale del terreno per i quali sono state applicate le formule del potenziale, dell'accelerazione di gravità (derivata prima del potenziale) e della sua variazione (derivata seconda del potenziale).

Le formule applicate, implementate in un codice Matlab, si sono rivelate efficienti fino a risolvere le singolarità che invece appaiono frequentemente in letteratura in casi analoghi.

Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

Punto	Modellazione Prismatica (A) [m/s <sup>2</sup> ]			Modellazione Poliedrica (B) [m/s <sup>2</sup> ]			Differenza (A-B) [m/s <sup>2</sup> ]		
	Ux	Uy	Uz	Ux	Uy	Uz	Ux	Uy	Uz
P1	6,2564096882E-05	-4,9545985357E-05	1,9101975275E-05	6,2564096883E-05	-4,9545985357E-05	1,9101975275E-05	-8,5029910630E-16	5,3905176763E-17	-9,0998443589E-17
P2	1,1033171260E-04	-5,5294651562E-05	3,2273531419E-05	1,1033171260E-04	-5,5294651562E-05	3,2273531461E-05	1,0600786741E-16	9,4305260216E-17	-4,2387100774E-14
P3	1,7873372261E-04	1,7991440031E-04	8,3973492327E-05	1,7873372261E-04	1,7991440031E-04	8,3973492327E-05	2,0599841277E-16	6,2992146221E-17	5,0779964001E-16
P4	1,9709372587E-04	1,9835515553E-04	6,7022501003E-05	1,9709372587E-04	1,9835515553E-04	6,7022501001E-05	-1,8298622166E-16	3,3800002727E-16	1,2081942434E-15
P5	-1,6953960395E-04	2,2227081490E-04	1,1691440513E-04	-1,6953960395E-04	2,2227081490E-04	1,1691440513E-04	1,5100225757E-16	3,0300740216E-16	1,0599431489E-16
P6	-3,0515471692E-04	-1,2552718082E-04	-2,1347181198E-04	-3,0515471692E-04	-1,2552718082E-04	-2,1347181194E-04	-1,2002118049E-16	4,4501078170E-16	-3,8199017517E-14
P7	-8,1703164350E-05	-8,7792716448E-05	5,0309072283E-05	-8,1703164350E-05	-8,7792716448E-05	5,0309072285E-05	-6,8520222048E-16	4,2759578430E-16	-2,0076984780E-15
P8	1,990262220E-05	-1,0888244877E-04	-5,9155811047E-05	1,990262220E-05	-1,0888244877E-04	-5,9155811089E-05	-6,7110081598E-16	-1,3999760552E-16	4,1809898642E-14
P9	1,8632113170E-05	-1,0499665110E-05	-2,4662623913E-05	1,8632113170E-05	-1,0499665110E-05	-2,4662623912E-05	4,4699622693E-17	5,1801146922E-17	-8,1709880290E-16
P10	6,2452225074E-05	-4,9425631849E-05	-1,8994712481E-05	6,2452225074E-05	-4,9425631849E-05	-1,8994712481E-05	-6,1639604011E-16	9,9096078565E-17	7,4599885731E-17
P11	1,6996113497E-04	1,7224825884E-04	-9,0971907634E-05	1,6996113497E-04	1,7224825884E-04	-9,0971907635E-05	4,9005938196E-17	1,7699600466E-16	1,0330007249E-15
P12	-1,5191909003E-04	2,1541839415E-04	-1,2118873244E-04	-1,5191909003E-04	2,1541839415E-04	-1,2118873244E-04	1,2601139750E-16	4,9401671989E-16	8,5001450323E-17
P13	-7,9946298031E-05	-8,6073821243E-05	-5,1015856702E-05	-7,9946298030E-05	-8,6073821243E-05	-5,1015856701E-05	-5,2570252838E-16	-8,7007224342E-17	-9,3959670773E-16
P14	3,338032953E-06	-2,0802803912E-06	-1,2714217526E-04	3,338032957E-06	-2,0802803912E-06	-1,2714217528E-04	-3,4229999003E-16	-1,1669996431E-17	1,8062997929E-14
P15	6,0859224196E-05	7,2928855601E-05	-4,1461642925E-04	6,0859224196E-05	7,2928855601E-05	-4,1461642924E-04	3,2610090843E-16	2,2400972136E-16	-2,9150401711E-15
P16	9,9078564749E-05	1,0570395699E-04	-3,6166670311E-04	9,9078564749E-05	1,0570395699E-04	-3,6166670311E-04	-4,4070107806E-16	3,7200331791E-16	-9,1580389106E-15
P17	6,7811673308E-06	-1,0765943090E-05	-2,8210084468E-05	6,7811673315E-06	-1,0765943089E-05	-2,8210084469E-05	-6,9889027291E-16	-3,8720078305E-16	7,0970180145E-16
P18	8,7137760697E-06	-4,2172258125E-05	1,2191718771E-05	8,7137760697E-06	-4,2172258125E-05	1,2191718793E-05	1,4580825154E-17	-9,0896799636E-17	-2,19338000868E-14
P19	-4,5312391432E-05	3,0250342137E-05	-4,0269084160E-07	-4,5312391432E-05	3,0250342137E-05	-4,0269087301E-07	1,5380085443E-16	5,7022258009E-18	3,1410335006E-14
P20	2,2210004130E-05	-9,2465482621E-06	-1,0375289133E-05	2,2210004130E-05	-9,2465482622E-06	-1,0375289126E-05	-9,1398243141E-17	1,2229122879E-16	-6,6678010091E-15

Tabella 11 - Valori della derivata prima del Potenziale per densità costante e differenza tra modellazione prismatica e poliedrica

## 8.2 Valutazione del potenziale gravitazionale e rappresentazioni grafiche per DTM a densità polinomiale

Le formule proposte nel capitolo 6, ottenute considerando la densità variabile con legge polinomiale di 4° grado vedi espressione (6.2) e (6.101), vengono codificate in ambiente Matlab ed applicate al caso studio del DTM di Cassino, calcolando gli effetti gravitazionali e relative rappresentazioni grafiche.

In questi test, si assumono come termini noti:

- la costante gravitazionale:

$$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2};$$

- i coefficienti del polinomio da utilizzare per l'espressione della densità:

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 1743.957, & c^{(1)}(3,1) &= -0.768, & C^{(2)}(3,3) &= -0.722 \cdot 10^{-3}, \\ C^{(3)}(3,3,3) &= -5.097 \cdot 10^{-7}, & C^{(4)}(3,3,3,3) &= -1.685 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

presi da riferimenti in letteratura [51] (Karcol) e relativi alla componente Z di nostro interesse.

Il DTM di riferimento, fornito dall'Istituto Geografico Militare IGM, del comune di Cassino, è caratterizzato da un grigliato di 20 m x 20 m che ricopre un'area di 10 km x 10 km.

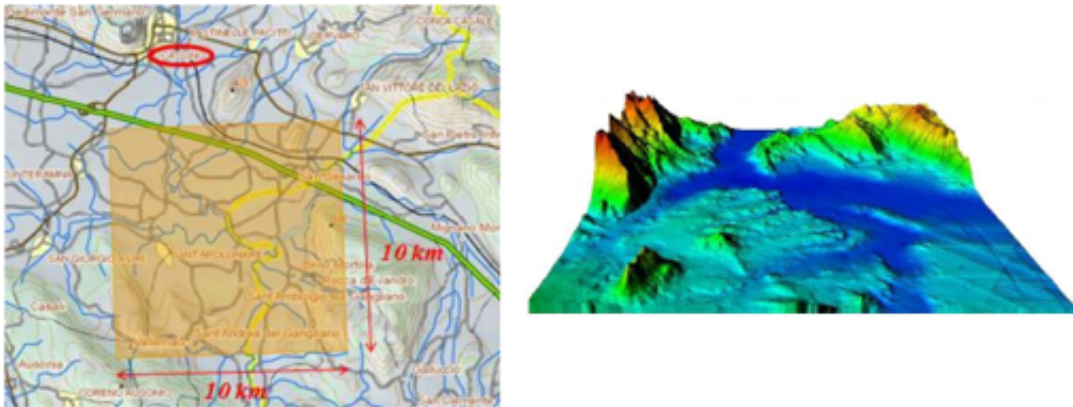


Figura 55 - DTM Cassino sud

La griglia è costituita da 500 x 500 punti distribuiti lungo la direzione x ed y, definiti da coordinate cartografiche (E, N, H), espresse in metri nel sistema di riferimento geodetico ED50 nella rappresentazione UTM (raccolte in un file testo in formato ASCII).

Si adotta per la discretizzazione del DTM una modellazione poliedrica. Assunto un sistema di riferimento OXYZ, con la coordinata X coincidente con quella Est, la coordinata Y con la Nord e la coordinata Z con la quota, il generico poliedro composto da 8 nodi (vedi Figura 56), è suddiviso in 7 facce, ogni faccia caratterizzata da un versore normale  $n_i$  uscente:

Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

- faccia di base F5, nodi [1 4 3 2] a quota z=0,00 m, normale -z (Figura 56a);
- quattro facce laterali F1, F2, F3 e F4 (Figura 56b e Figura 56c);
- faccia superiore suddivisa in due facce di forma triangolare F6 e F7 di normale +z .

Le facce superiori si adattano alle quote dei nodi del DTM, in modo da migliorare l'accuratezza della discretizzazione, rendendo più realistico il modello.

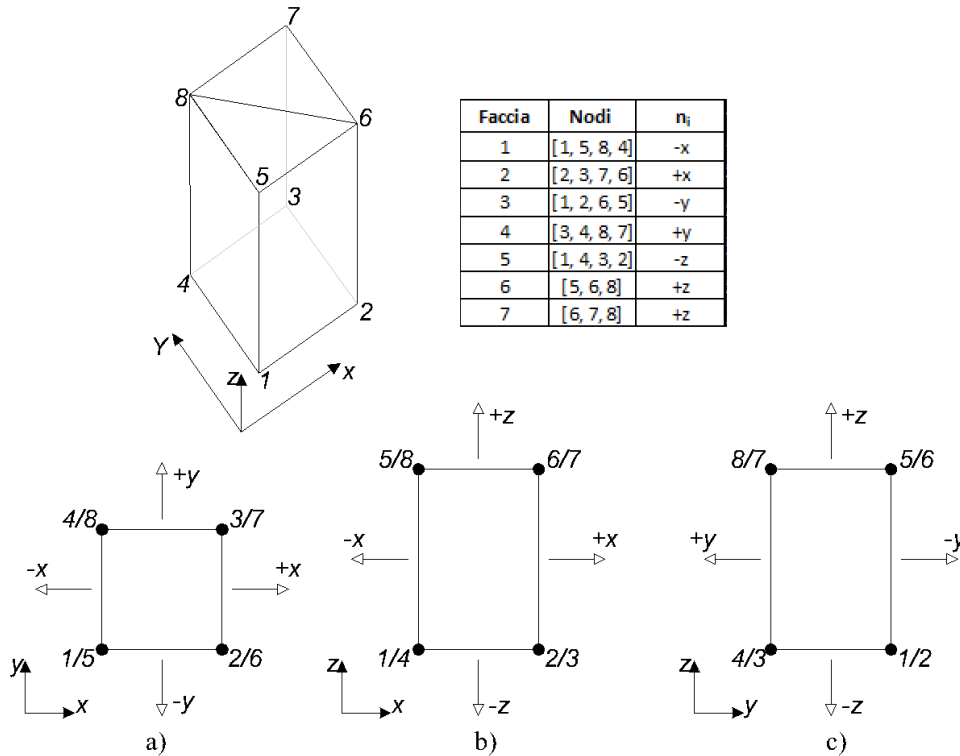


Figura 56 - Generico poliedro e relative facce

Quindi la distribuzione delle masse terrestri attraenti viene suddivisa in “elementi finiti” e si considera la densità variabile di volta in volta, come di seguito:

1. densità costante:

$$\delta(z) = 1743.957 \quad [kgm^{-3}]$$

2. densità variabile con legge lineare:

$$\delta(z) = 1743.957 - 0.768z$$

3. densità variabile con legge quadratica:

$$\delta(z) = 1743.957 - 0.768z - 0.722 \cdot 10^{-3}z^2$$

4. densità variabile con legge cubica:

$$\delta(z) = 1743.957 - 0.768z - 0.722 \cdot 10^{-3}z^2 - 5.097 \cdot 10^{-7}z^3$$

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

5. densità variabile con polinomio di quarto grado:

$$\delta(z) = 1743.957 - 0.768z - 0.722 \cdot 10^{-3}z^2 - 5.097 \cdot 10^{-7}z^3 - 1.685 \cdot 10^{-10}z^4$$

Per garantire una buona rappresentazione degli effetti gravitazionali del DTM di area 10 km x 10 km, andrebbe eseguito il calcolo per un numero elevato di punti di attratti o di osservazione, ciò risulterebbe gravoso dal punto di vista computazionale, quindi in questa fase di analisi viene approfondito lo studio su una porzione ridotta del DTM di Cassino Figura 57.

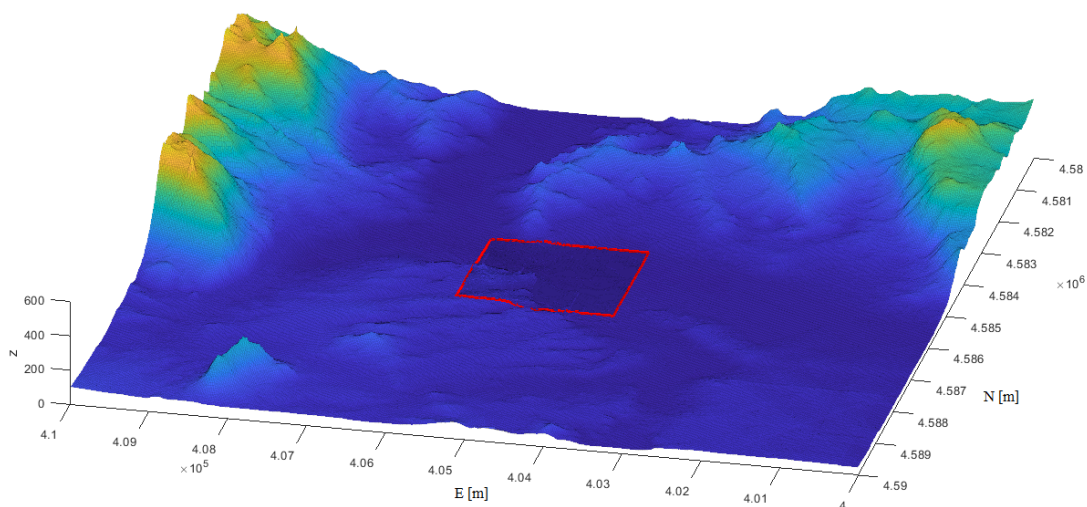


Figura 57 - Porzione DTM 2 Km x 2 Km estrapolata da DTM 10 Km x 10 Km

Si considera una porzione centrale del DTM che ricopre un'area di 2 km x 2 km, composto da una griglia di 101 x 101 punti, che coincidono con i vertici della faccia superiore dei poliedri.

Come si può osservare dalla Figura 58, il passo dei nodi della griglia del DTM, fornita dall'IGM risulta di 20 metri, mentre per i punti di osservazione nelle direzioni x (E) ed y(N), un passo di 60 metri, punti localizzati sulla superficie del DTM, Figura 59.

Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

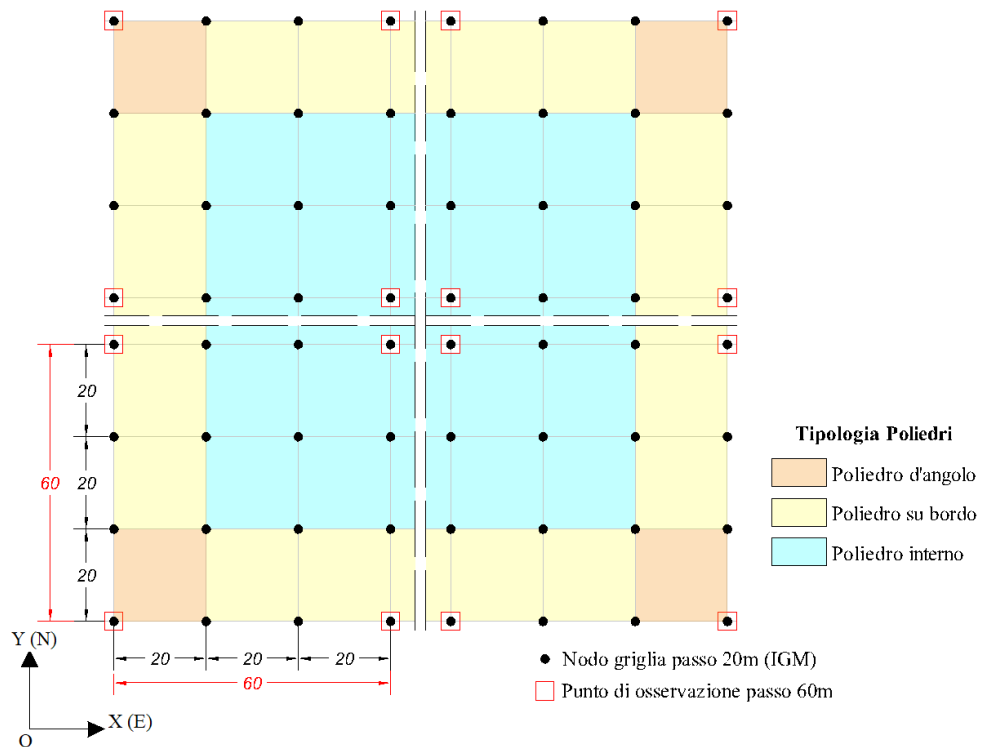


Figura 58 - Caratterizzazione: passo nodi, punti di osservazione e tipologia poliedri

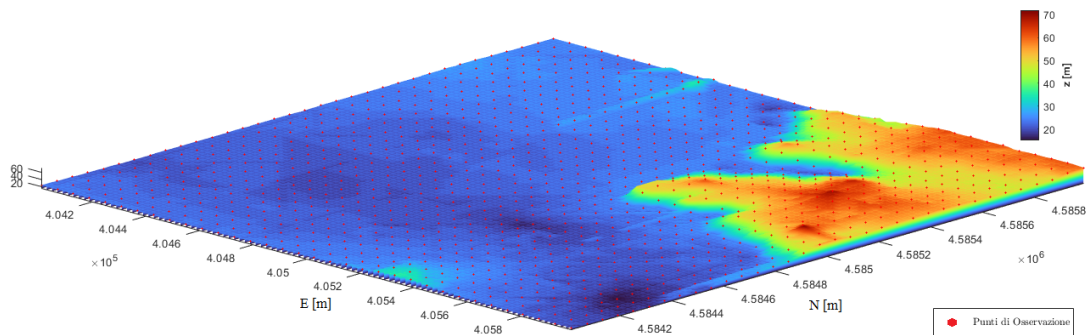


Figura 59 - Porzione DTM 2 Km x 2 Km e griglia dei punti di osservazione

Si ottiene quindi, una griglia di  $34 \times 34 = 1156$  punti di osservazione rispetto ai quali si calcola il potenziale gravitazionale con densità variabile con legge polinomiale del 4° grado.

Il potenziale è ottenuto dal seguente integrale volumetrico:

$$U(P) = G \int_{\Omega} \frac{\delta(s)}{[(p-s) \cdot (p-s)]^{\frac{1}{2}}} dV(s) \quad (8.1)$$

Che si riconduce a più integrali di superficie ed ognuno di essi in integrali di linea, mediante l'applicazione del teorema di Gauss. Questo permette di ottenere formulazioni,

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

tali da valutare in forma analitica gli effetti gravitazionali, in funzione delle coordinate dei vertici della frontiera della massa attraente.

Il DTM risulta essere suddiviso in  $(n - 1)^2 = (101 - 1)^2 = 10000$  poliedri. Per ogni poliedro con faccia superiore suddivisa in due facce di forma triangolare, si dovrebbero calcolare 70000 integrali di superficie 2D, quindi in totale per una griglia di  $34 \times 34 = 1156$  punti di osservazione, risulta  $1156 \times 70000 = 80920000$  integrali di superficie, calcolo molto gravoso dal punto di vista computazionale.

In base alla posizione dei poliedri nel DTM discretizzato Figura 58 (tipologia poliedri), è possibile trascurare il calcolo degli integrali 2D nei poliedri che presentano facce verticali in comune con altri poliedri, infatti le facce sono caratterizzate da versori normali uscenti di segno opposti, che danno un contributo complessivamente nullo per il calcolo.

Nel caso di poliedri d'angolo si trascura il calcolo degli integrali per 2 facce, poliedri su bordo 3 facce e per i poliedri interni si trascura il calcolo degli integrali per le facce verticali.

Questo permette di ridurre il numero dei calcoli degli integrali in 30400 per ogni punto di osservazione ed i tempi di elaborazione.

Per i  $34 \times 34$  punti di osservazione si valutano, al variare della densità, i valori del potenziale gravitazionale della porzione di DTM, come riportato nelle tabelle seguenti con le relative rappresentazioni grafiche e due sezioni in direzione x ed y, in corrispondenza del valore del potenziale massimo, localizzato nel punto della superficie terrestre del DTM, a quota maggiore.

Per densità costante,  $\delta(z) = 1743.957 \text{ [kgm}^{-3}\text{]}$ :

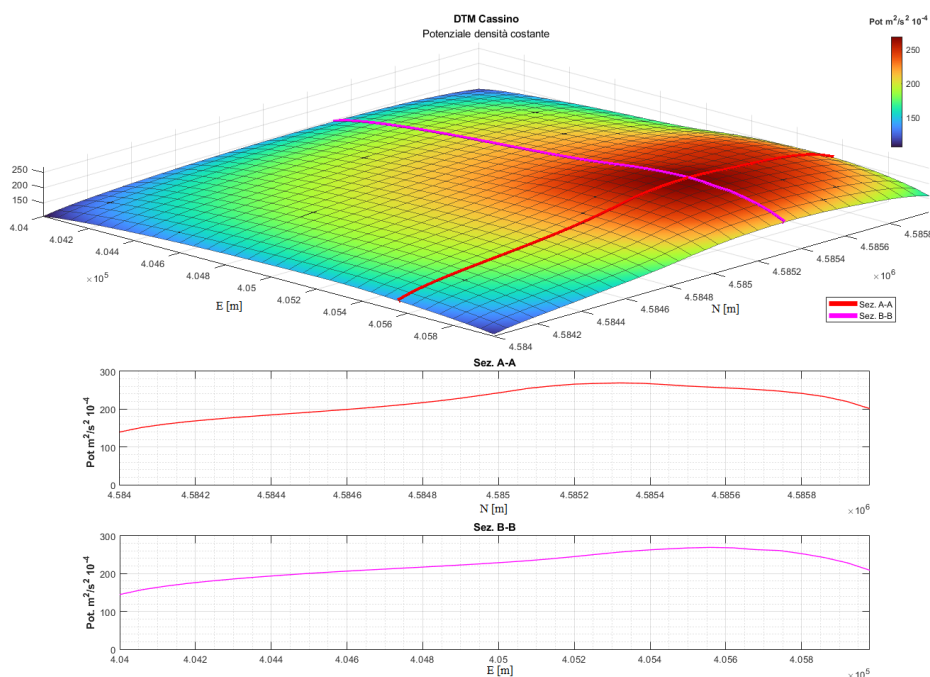


Figura 60 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità costante



## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

Per densità variabile linearmente,  $\delta(z) = 1743.957 - 0.768z$  :

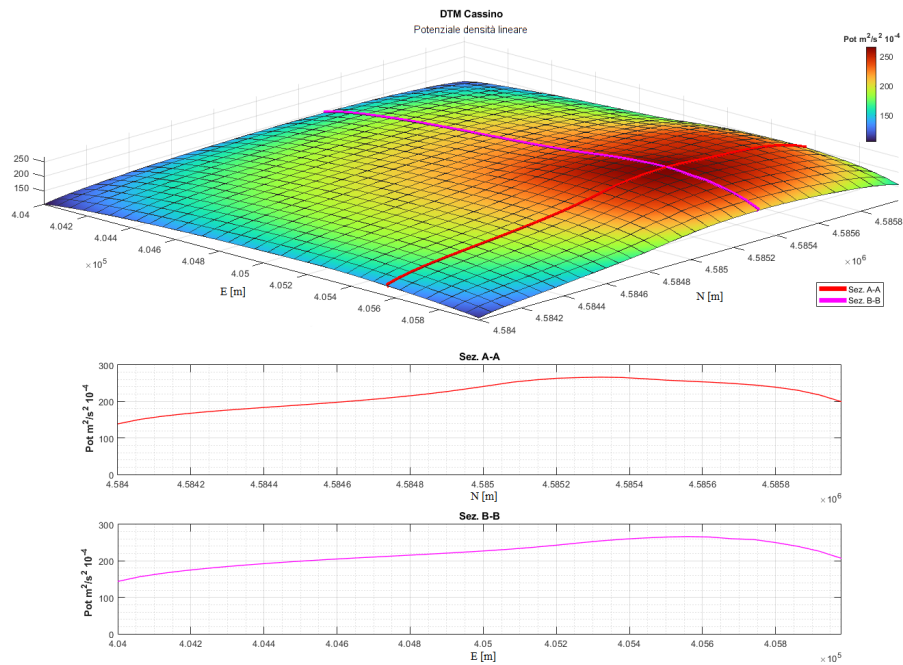


Figura 61 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile linearmente

Per densità variabile con legge quadratica,  $\delta(z) = 1743.957 - 0.768z - 0.722 \cdot 10^{-3}z^2$ :

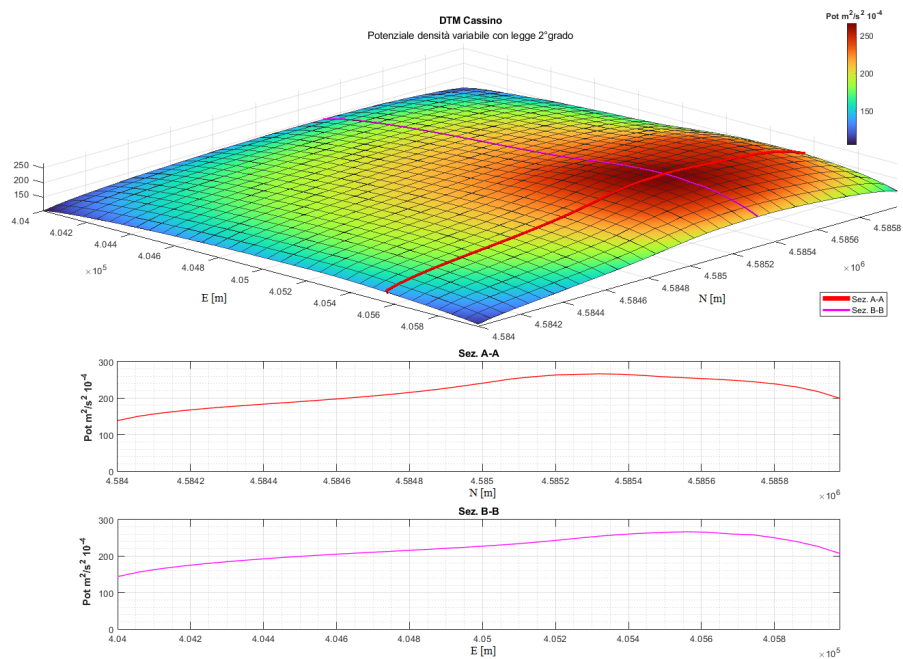


Figura 62 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile con legge quadratica



## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

Per densità variabile con legge cubica,  $\delta(z) = 1743.957 - 0.768z - 0.722 \cdot 10^{-3}z^2 - 5.097 \cdot 10^{-7}z^3$ :

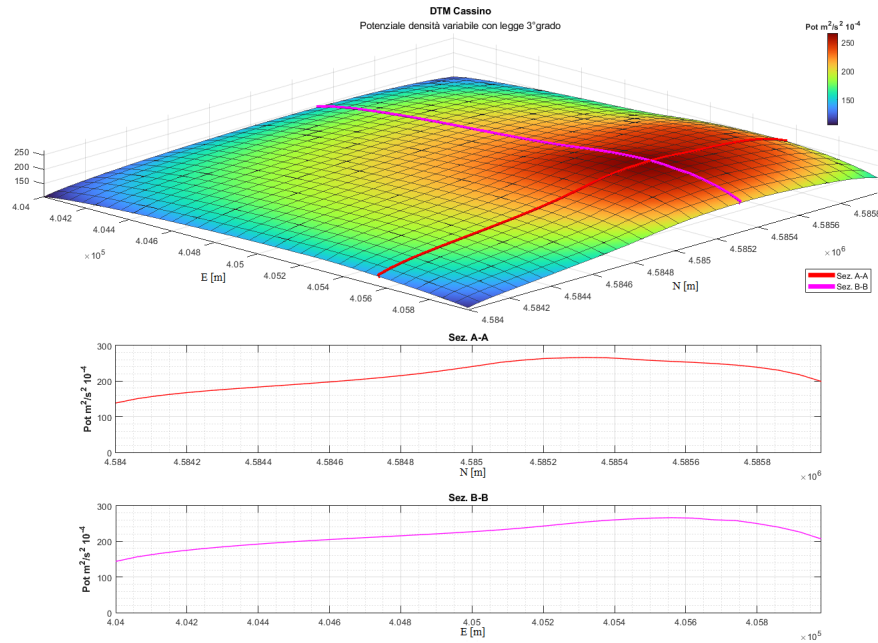


Figura 63 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile con legge cubica

Per densità variabile con polinomio di quarto grado,  $\delta(z) = 1743.957 - 0.768z - 0.722 \cdot 10^{-3}z^2 - 5.097 \cdot 10^{-7}z^3 - 1.685 \cdot 10^{-10}z^4$ :

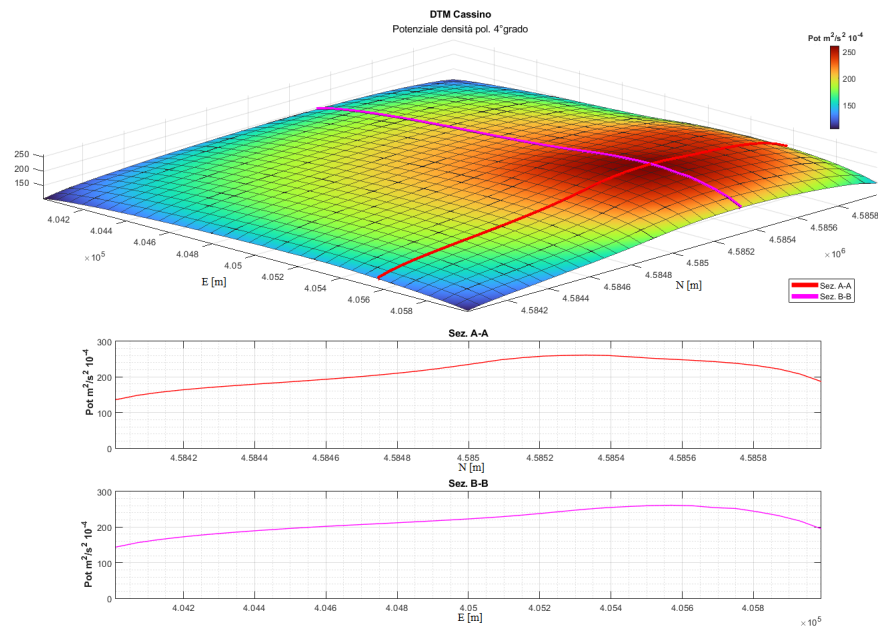


Figura 64 - Rappresentazione grafica del Potenziale densità variabile con polinomio di quarto grado

## Capitolo 8 - Soluzioni numeriche per la determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno DTM

Per completezza si valutano e codificano in ambiente Matlab anche le relazioni della derivata prima del capitolo 4, con densità costante e variabile linearmente. Si rappresenta la componente lungo z di maggior interesse e si riscontra che in corrispondenza della quota massima, il valore della derivata è minimo. Per densità costante:

$$\delta(z) = 1743.957 \quad [kgm^{-3}]$$

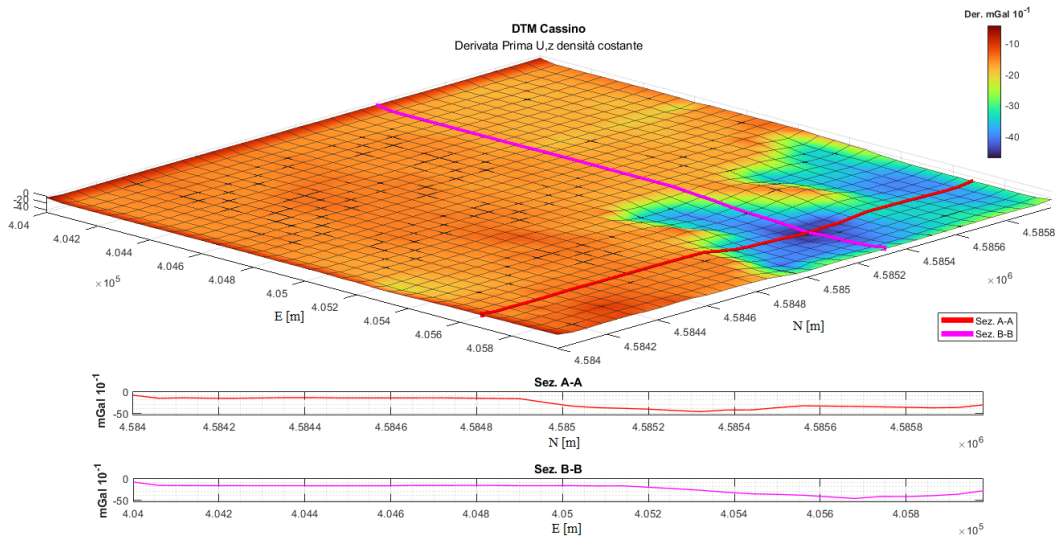


Figura 65 - Rappresentazione grafica della derivata prima densità costante

Per densità variabile linearmente:

$$\delta(z) = 1743.957 - 0.768z$$

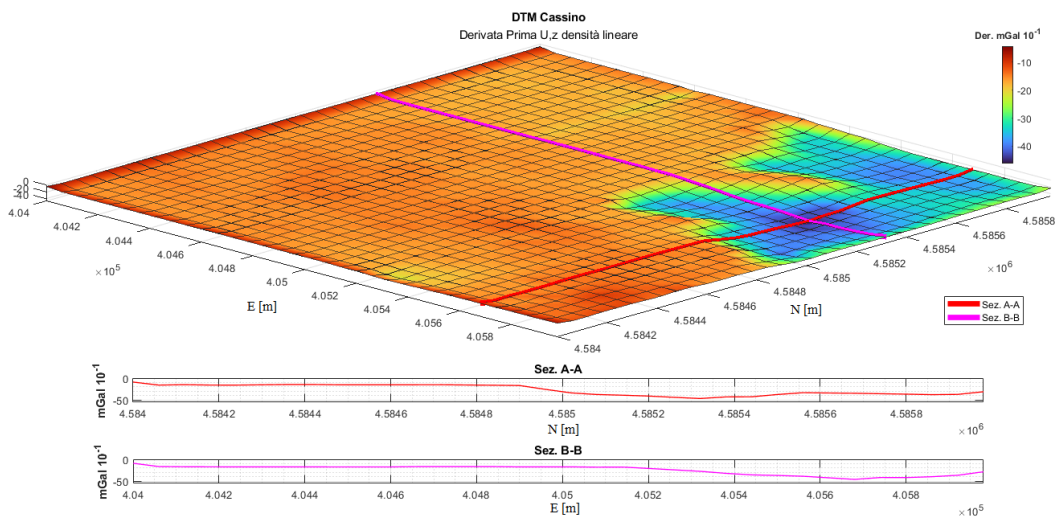


Figura 66 - Rappresentazione grafica della derivata prima densità variabile linearmente

*E-02	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1.1612551	1.2479991	1.3073046	1.3557703	1.3982838	1.4360941	1.4739824	1.5125406	1.5427172	1.5714828	1.5955920	1.6207776	1.6416040	1.6663696	1.6922393	1.7233442	1.7616805
2	1.2222397	1.3263879	1.3951230	1.4502974	1.4971498	1.5389050	1.6193854	1.6193854	1.6516459	1.6869601	1.7074394	1.7363800	1.7581375	1.7818900	1.8096907	1.8442422	1.8949337
3	1.2690430	1.3811994	1.4581208	1.5172821	1.5682384	1.6132370	1.6561829	1.6954726	1.7313650	1.7653205	1.7970868	1.8271504	1.8441607	1.8582392	1.8790174	1.9353470	1.9854510
4	1.3074037	1.4272048	1.5068155	1.5707800	1.6244380	1.6719240	1.7156578	1.7547379	1.7893790	1.8295854	1.8956765	1.8877145	1.9139250	1.9410785	1.9711240	2.0066223	2.0522887
5	1.3406677	1.4633837	1.5473116	1.6145895	1.6689428	1.7187828	1.7632700	1.8046416	1.8426823	1.8795766	1.9106033	1.9419994	1.9702151	1.9992419	2.0304365	2.0650773	2.1061611
6	1.3680506	1.4943213	1.5798058	1.6486217	1.7060291	1.7568240	1.8022440	1.8441683	1.8823354	1.9164638	1.9562473	1.9846018	2.0147504	2.0466334	2.0763497	2.1104536	2.1502052
7	1.3907147	1.5182314	1.6062143	1.6765869	1.7355640	1.7872909	1.8339456	1.8766487	1.9162968	1.9539435	1.9873422	2.0198350	2.0507971	2.0840569	2.1123313	2.1461508	2.1849594
8	1.4083006	1.5381298	1.6267913	1.6983241	1.7584237	1.8155705	1.8592286	1.9027374	1.9439170	1.9828957	2.0154428	2.0470625	2.0771116	2.1088220	2.1401594	2.1739164	2.2144770
9	1.4239323	1.5533049	1.6454521	1.7280076	1.7900000	1.8431240	1.8925516	1.9363236	1.9780988	2.0172428	2.0519034	2.0825321	2.1115419	2.1459900	2.1775086	2.2107804	2.2462796
10	1.4471702	1.5765647	1.6683057	1.7512440	1.8036265	1.8530333	1.9006388	1.9451579	1.9872369	2.0284410	2.0655019	2.0982241	2.1294374	2.1610912	2.1936621	2.2269696	2.2623781
11	1.4591252	1.5792971	1.6701102	1.7434241	1.8049009	1.8587010	1.9076967	1.9518668	1.9921770	2.0304288	2.0660781	2.0982677	2.1301622	2.1619146	2.1941417	2.2282365	2.2632678
12	1.4525959	1.5804164	1.6704615	1.7421668	1.8033634	1.8567848	1.9041104	1.9482058	1.9897996	2.0272484	2.0624877	2.0959598	2.1281951	2.1592684	2.1912647	2.2241526	2.2597639
13	1.4489665	1.5743528	1.6636027	1.7340054	1.7957814	1.8520778	1.9042788	1.9527324	2.0002258	2.0467320	2.0914626	2.1353426	2.1783937	2.1843245	2.1944729	2.2165915	2.2507818
14	1.4451067	1.5692133	1.6575809	1.7276085	1.7875402	1.8401546	1.8871039	1.9298104	1.9690044	2.0067123	2.0415150	2.0731309	2.1040095	2.1329155	2.1611925	2.1898962	2.2191529
15	1.4387771	1.5626321	1.6497646	1.7203123	1.7790816	1.8314550	1.8785182	1.9207395	1.9599923	1.9944383	2.0279439	2.0603229	2.0899290	2.1177867	2.1445577	2.1710239	2.1968236
16	1.4314620	1.5549490	1.6420648	1.7097614	1.7686272	1.8209667	1.8672596	1.9088253	1.9464160	1.9805283	2.0124700	2.0425562	2.0712267	2.0991783	2.1264393	2.1484098	2.1713640
17	1.4226086	1.5439052	1.6287400	1.6980471	1.7563491	1.8074444	1.8526778	1.8933972	1.9300385	1.9635828	1.9944059	2.0237570	2.0522988	2.0797718	2.1015951	2.1231033	2.1477600
18	1.4121062	1.5327886	1.6169737	1.6849384	1.7421223	1.7921101	1.8364228	1.8761324	1.9121423	1.9448756	1.9750464	2.0031546	2.0298006	2.0544017	2.0767240	2.0957782	2.1110013
19	1.4007391	1.5199550	1.6037822	1.6707651	1.7273237	1.7757927	1.8188707	1.8579412	1.8924270	1.9244459	1.9538000	1.9807987	2.0057146	2.0291435	2.0491041	2.0666196	2.0816255
20	1.3874189	1.5058113	1.5889697	1.6556044	1.7111221	1.7587559	1.8001296	1.8374473	1.8701918	1.9011842	1.9301094	1.9562931	1.9795324	2.0013184	2.0200964	2.0366585	2.0500888
21	1.3724879	1.4898761	1.5721826	1.6382090	1.6931877	1.7391813	1.7800602	1.8151608	1.8466045	1.8763487	1.9046780	1.9292065	1.9520729	1.9728048	1.9910422	2.0062591	2.0187739
22	1.3564840	1.4717203	1.5530688	1.6181448	1.6725992	1.7191176	1.7598521	1.7951908	1.8217941	1.8501908	1.8768091	1.9025231	1.9239348	1.9436716	1.9607353	1.9751109	1.9868990
23	1.3361891	1.4510497	1.5310731	1.5948534	1.6494638	1.6954149	1.7340401	1.7668437	1.7960152	1.8228582	1.8482319	1.8717814	1.8938172	1.9123965	1.9284008	1.9419871	1.9533281
24	1.3152331	1.4297972	1.5055008	1.5696280	1.6228674	1.6681734	1.7066740	1.7388203	1.7670954	1.7934537	1.8178431	1.8400843	1.8613129	1.8781943	1.8919469	1.9026227	1.9118477
25	1.2917095	1.4021737	1.4794737	1.5411351	1.5937552	1.6365351	1.6706613	1.7037055	1.7347616	1.7631687	1.8060128	1.8249952	1.8566021	1.8869610	1.9159267	1.9437952	1.9716157
26	1.2671897	1.3757304	1.4505231	1.5101543	1.5592478	1.6021135	1.6389180	1.6711558	1.6988729	1.7239881	1.7464753	1.7664667	1.7838937	1.8001596	1.8158209	1.8263211	1.8378068
27	1.2498936	1.3463117	1.4192605	1.4755656	1.5224000	1.5628136	1.5980207	1.6287048	1.6556313	1.6800043	1.7013504	1.7198026	1.7368362	1.7518145	1.7658209	1.7785068	1.7888900
28	1.2082389	1.3124313	1.3816100	1.4354429	1.4789750	1.5169019	1.5502807	1.5790287	1.6045419	1.6273254	1.6475544	1.6653574	1.6815978	1.6956565	1.7090627	1.7218266	1.7328482
29	1.1760449	1.2699551	1.3346885	1.3843446	1.4252327	1.4609916	1.4915375	1.5162971	1.5452971	1.5683598	1.5859534	1.6425347	1.6425347	1.6548934	1.6644833	1.6746644	1.6844644
30	1.1240639	1.2144031	1.2716634	1.3150356	1.3550356	1.3915935	1.4160409	1.4412885	1.4641158	1.4847551	1.5023931	1.5187849	1.5327386	1.5459960	1.5577233	1.5686837	1.5776643
31	1.0586601	1.1257263	1.1739223	1.2133729	1.2472769	1.2769221	1.3027099	1.3238400	1.3475625	1.3662963	1.3833236	1.3987388	1.4117055	1.4239334	1.4342791	1.4436595	1.4515356
*E-01	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1.8117256	1.8632781	1.9118807	1.9480089	1.9790089	1.9955361	2.0148863	2.0213761	2.0246482	2.0246482	1.9955361	1.9606934	1.9248718	1.8688098	1.7994058	1.7118267	1.5907881
2	1.9482322	2.0051420	2.0555262	2.1059737	2.1485420	2.1804883	2.1985641	2.2079759	2.2113543	2.1997010	2.1775168	2.1458259	2.1002868	2.0406310	1.9661558	1.8660186	1.7079752
3	2.0469259	2.1170526	2.1740542	2.2259908	2.2650954	2.2967589	2.3200540	2.3347444	2.3424427	2.3424427	2.3060445	2.2723078	2.2184795	2.1543307	2.0745708	1.9719786	1.7937914
4	2.1572530	2.2447802	2.2940450	2.3357216	2.4076269	2.4485635	2.4858151	2.5084855	2.5244427	2.5244427	2.4692444	2.4060445	2.3060445	2.2062721	2.1456510	2.0262524	1.8547716
5	2.2798224	2.2561404	2.3067241	2.3925995	2.4793666	2.4963916	2.5128229	2.5242220	2.5183489	2.5027509	2.4703340	2.4206464	2.3511393	2.2591225	2.1293995	1.9505786	1.7005786
6	2.2298339	2.2856533	2.3520714	2.4041811	2.4532960	2.4888172	2.5185544	2.5253038	2.5248338	2.5197916	2.4673744	2.3986899	2.3031853	2.2068899	2.031853	1.720847	1.9911342
7	2.2534607	2.3053065	2.3669274	2.4236321	2.4682719	2.5010231	2.5156322	2.5302808	2.5621508	2.5773927	2.5526282	2.4823420	2.3423420	2.2133072	2.0243312	1.7024333	1.9755720
8	2.2714941	2.3174451	2.3690909	2.4192560	2.4648822	2.4972322	2.5248810	2.5563654	2.5920714	2.6072352	2.6133778	2.5927545	2.5469898	2.4782007	2.3426283	2.0537480	1.8547480
9	2.2944071	2.3354063	2.3809052	2.4309060	2.4859954	2.5385732	2.5865060	2.6269960	2.6571625	2.6803468	2.6678279	2.6494066	2.5994863	2.5237862	2.4188525	2.2826863	2.0870263
10	2.3003742	2.3425551	2.3921918	2.4488179	2.5098454	2.5675629	2.6148579	2.6495823	2.6711346	2.6792409	2.6697191	2.6531497	2.6107362	2.5289328	2.4220875	2.2783614	2.0834504
11	2.3018041	2.3453062	2.3983426	2.4636833	2.5284640	2.5851632	2.6251436	2.6395631	2.6534389	2.6587156	2.6490777	2.6309670	2.5735652	2.4991225	2.3932165	2.2656516	2.0687026
12	2.2978097	2.3418834	2.3984401	2.4673992	2.5240071	2.5715059	2.6101436	2.6395631	2.6534389	2.6587156	2.6490777	2.6309670	2.5735652	2.4991225	2.3932165	2.2656516	2.0687026
13	2.2879002	2.3079044	2.3871645	2.4511835	2.5073616	2.5514178	2.5906930	2.6044228	2.6104428	2.6104428	2.6008613	2.5779056	2.5362770	2.4669807	2.3671057	2.2395250	2.0500271
14	2.2710277	2.3116027	2.3619995	2.4234728	2.4689998	2.5025032	2.5323080	2.5483476	2.5472411	2.5501900	2.5337483	2.5166727	2.4782757	2.4151527	2.3229648	2.2156796	2.0718575
15	2.2238120	2.2523726	2.2838139	2.3177385	2.3484023	2.3630712	2.3681435	2.3728062	2.3699772	2.3715426	2.3686514	2.3516255	2.3113999	2.2703486	2.1916982	2.0884427	1.9197937
16	2.1935490	2.2172981	2.2406376	2.2638476	2.2812731	2.2910722	2.2928712	2.2939607	2.2950130	2.2880646	2.2754229	2.2544435	2.2227620	2.1708895	2.1062810	2.0113857	1.8651204
17	2.1271027	2.1516027	2.1761027	2.2016027	2.2254027	2.2483027	2.2693027	2.2883027	2.3053027	2.3203027	2.3343027	2.3473027	2.3593027	2.3703027	2.3803027	2.3893027	1.8010018
18	2.0424852	2.0679852	2.0934852	2.1189852	2.1444852	2.1699852	2.1954852	2.									

*E-02	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1.1531877	1.2393745	1.2982847	1.3464116	1.3860177	1.4270226	1.4636966	1.5018965	1.5317803	1.5602542	1.5840584	1.6090036	1.6295547	1.6539897	1.6794777	1.7101142	1.7478793
2	1.2139136	1.3175151	1.3856043	1.4404063	1.4869175	1.5283885	1.5689871	1.6081132	1.6440070	1.6750205	1.6995167	1.7244962	1.7453787	1.7687902	1.7961237	1.8303233	1.8801168
3	1.2603012	1.3742670	1.4466247	1.5000000	1.5575775	1.6022430	1.6448312	1.6741389	1.7019318	1.7284035	1.7540305	1.7804989	1.8084498	1.8380023	1.8702729	1.9070784	1.9700478
4	1.3056519	1.4295219	1.5069461	1.5601800	1.6176665	1.6693932	1.7039712	1.7424669	1.7848689	1.8312669	1.8746644	1.9143443	1.9502054	1.9926961	1.9515430	2.0365290	2.0365290
5	1.3315718	1.4555184	1.5369103	1.6037463	1.6577155	1.7071915	1.7513242	1.8300232	1.8665522	1.8972191	1.9282911	1.9582911	1.9561560	1.9848011	2.0155538	2.0496530	2.0900824
6	1.3587992	1.4843370	1.5692280	1.6375883	1.6949399	1.7539999	1.8167488	1.8734988	1.9340588	1.9975088	1.9706734	2.0004458	2.0004458	2.0299360	2.0612085	2.0947923	2.1339054
7	1.3813458	1.5083633	1.5955015	1.6654222	1.7239999	1.7753456	1.8216376	1.8639850	1.9032318	1.9405280	1.9753986	2.0013818	2.0333956	2.0631414	2.0938052	2.1303292	2.1685383
8	1.4143423	1.5433051	1.6320067	1.7039331	1.7648783	1.8187118	1.8685812	1.9099312	1.9504372	1.9885004	2.0220143	2.0513395	2.0858525	2.1148676	2.1459609	2.1790216	2.2493502
9	1.4327631	1.5602510	1.6521707	1.7249004	1.7863936	1.8401669	1.8894113	1.9332326	1.9712726	2.0127726	2.0455129	2.0799037	2.1105668	2.1410636	2.1726331	2.2051833	2.2401043
10	1.4472979	1.5531332	1.6436403	1.7166516	1.7782286	1.8309775	1.8800387	1.9234541	1.9648616	2.0036395	2.0379327	2.0709211	2.1007524	2.1309415	2.1620269	2.1948122	2.2297629
11	1.4531631	1.5602510	1.6521707	1.7249004	1.7863936	1.8401669	1.8894113	1.9332326	1.9712726	2.0127726	2.0455129	2.0799037	2.1105668	2.1410636	2.1726331	2.2051833	2.2401043
12	1.4531631	1.5602510	1.6521707	1.7249004	1.7863936	1.8401669	1.8894113	1.9332326	1.9712726	2.0127726	2.0455129	2.0799037	2.1105668	2.1410636	2.1726331	2.2051833	2.2401043
13	1.4411973	1.5690223	1.6592860	1.7320587	1.7932167	1.8466479	1.8952931	1.9391185	1.9790082	2.0169934	2.0523066	2.0841593	2.1156921	2.1470551	2.1788568	2.2124742	2.2469670
14	1.4431052	1.5701756	1.6596823	1.7309472	1.7917581	1.8448257	1.8918122	1.9355678	1.9768170	2.0139262	2.0488292	2.0819641	2.1126009	2.1445271	2.1761065	2.2085342	2.2436180
15	1.4426451	1.5701756	1.6596823	1.7309472	1.7917581	1.8448257	1.8918122	1.9355678	1.9768170	2.0139262	2.0488292	2.0819641	2.1126009	2.1445271	2.1761065	2.2085342	2.2436180
16	1.4357266	1.5643287	1.6529712	1.7259281	1.7862014	1.8350404	1.8816172	1.9254593	1.9645699	2.0021553	2.0368193	2.0692380	2.1002844	2.1286558	2.1549638	2.1895603	2.2213404
17	1.4357266	1.5643287	1.6529712	1.7259281	1.7862014	1.8350404	1.8816172	1.9254593	1.9645699	2.0021553	2.0368193	2.0692380	2.1002844	2.1286558	2.1549638	2.1895603	2.2213404
18	1.4295202	1.526757	1.6393071	1.7094418	1.7678497	1.8198812	1.8666187	1.9085306	1.9474754	1.9816266	2.0148304	2.0468139	2.0761905	2.1037309	2.1301704	2.1562815	2.1817039
19	1.4228215	1.5446238	1.6299069	1.6990016	1.7575063	1.8095060	1.8534827	1.8974843	1.9340496	1.96397083	2.00293406	2.0293406	2.0570783	2.0853654	2.1102124	2.1339637	2.1583844
20	1.4135118	1.5341353	1.6184927	1.68474005	1.7455407	1.7961130	1.8410455	1.8811194	1.9178390	1.9511194	1.9816752	2.0107518	2.0390062	2.0643912	2.0877327	2.1089584	2.1263336
21	1.4031015	1.5231240	1.6068382	1.6744164	1.7312569	1.7809295	1.8249481	1.8643791	1.9001205	1.9325936	1.9625073	1.9903576	2.0167403	2.0410711	2.0631331	2.0819390	2.0989199
22	1.3918308	1.5103964	1.5937558	1.6603541	1.7164934	1.7647514	1.8075479	1.8463543	1.8805813	1.9123496	1.9414580	1.9682140	1.9928884	2.0160722	2.0357958	2.0530949	2.0678841
23	1.3786136	1.4963623	1.5790584	1.6454002	1.7005010	1.7478499	1.7889588	1.8260298	1.8583333	1.8892872	1.9179707	1.9439270	1.9669457	1.9883084	2.0070751	2.0234382	2.0366701
24	1.3637923	1.4805445	1.5623951	1.6280440	1.6826991	1.7286137	1.7690416	1.8039161	1.8331395	1.8646590	1.8927585	1.9177621	1.9397224	1.9602462	1.9782842	1.9933155	2.0056562
25	1.3477459	1.4419881	1.5215715	1.5849907	1.6392767	1.6849482	1.7235942	1.7559326	1.7849126	1.8115601	1.8367351	1.8600808	1.8819191	1.9003192	1.9161551	1.9295831	1.9407750
26	1.3069303	1.4189862	1.4961706	1.5599364	1.6128539	1.6578836	1.6961429	1.7280835	1.7561755	1.7824343	1.8065444	1.8294541	1.8496643	1.8669586	1.8819547	1.8948493	1.9066008
27	1.2833559	1.393992	1.4703110	1.5316220	1.5825546	1.6264453	1.6644953	1.7006953	1.7346888	1.7649551	1.7910762	1.8141762	1.8341762	1.85048674	1.8741560	1.8967600	1.9186760
28	1.2591810	1.371466	1.4415237	1.5008237	1.5497304	1.5922353	1.6288007	1.6608272	1.6882921	1.7132914	1.7356083	1.7554390	1.7721713	1.7888330	1.8034900	1.814729	1.8261378
29	1.2320400	1.3378845	1.4104312	1.4664204	1.5129828	1.5531516	1.5881372	1.6182611	1.6435447	1.6695630	1.6907190	1.7090552	1.7254985	1.7465337	1.7672031	1.7773736	1.7773736
30	1.2005579	1.3041719	1.3729755	1.4265115	1.4697934	1.5074914	1.5406600	1.5692712	1.5945622	1.6171842	1.6372623	1.6549251	1.6710361	1.6849603	1.6982273	1.7108555	1.7217481
31	1.1635253	1.2633050	1.3732684	1.4164212	1.4537774	1.4822238	1.5133203	1.5332063	1.5547080	1.5763512	1.5912156	1.6030268	1.6122224	1.6202793	1.6442539	1.6642259	1.6776761
32	1.1174144	1.2066994	1.3263120	1.3904466	1.4378672	1.4737867	1.4071368	1.4322205	1.4548923	1.4753842	1.4929284	1.5091551	1.5230132	1.5361319	1.5477377	1.5583827	1.5674580
34	1.0517927	1.1184797	1.1664028	1.2056253	1.2393278	1.2687919	1.2944190	1.3173993	1.3389762	1.3575734	1.3897724	1.4026281	1.4147472	1.4249892	1.4342711	1.4418748	1.4418748
*E-01	1.7970758	1.8476628	1.8953655	1.9307536	1.9610307	1.9769148	1.9955727	2.0015798	2.0045284	1.9924640	1.9751919	1.9408633	1.9035953	1.8498813	1.7812165	1.6946224	1.5750793
2	1.932121	1.9880153	2.0373453	2.0868769	2.1286492	2.1598473	2.1772174	2.1860690	2.1906880	2.1773139	2.1552321	2.1238849	2.0787466	2.0197060	1.9460825	1.8471118	1.6909940
3	2.0944047	2.0991193	2.1514124	2.2400570	2.2400570	2.2400570	2.2915298	2.3116117	2.3119900	2.3066449	2.2815478	2.2490765	2.1957830	2.1323269	2.0516653	1.9381033	1.77160897
4	2.2034380	2.1611157	2.2254484	2.2782258	2.3237066	2.3630144	2.3911404	2.4006279	2.4019353	2.3406827	2.318123	2.2364809	2.228956	2.1240753	2.0064048	1.8365457	1.8365457
5	2.1406248	2.064769	2.2170669	2.3383445	2.4370652	2.4985859	2.5450990	2.4560675	2.4590675	2.4309677	2.4318560	2.3468378	2.2638786	2.1859756	2.0632781	1.8872066	1.8872066
6	2.1002817	2.2381137	2.3074345	2.3718933	2.4161014	2.4568605	2.4763844	2.4888994	2.4981054	2.4781295	2.4458601	2.3965501	2.3267672	2.2668849	2.1082471	1.9314084	1.9314084
7	2.2126750	2.2675853	2.3327397	2.3834895	2.4315082	2.4663712	2.4955712	2.5021235	2.5246267	2.5265797	2.5148853	2.4806637	2.4428677	2.3747347	2.2801378	2.1504083	1.9714911
8	2.2626200	2.2872620	2.3471568	2.4031621	2.4468664	2.4791353	2.5139373	2.5383434	2.5619919	2.5823273	2.5836488	2.5310665	2.4833740	2.4138140	2.3187336	2.1910755	2.0042672
9	2.2643104	2.2994540	2.3502508	2.3994139	2.4440249	2.4758933	2.5024891	2.5334534	2.5619919	2.5823273	2.5836488	2.5310665	2.4833740	2.4138140	2.3187336	2.1910755	2.0042672
10	2.2678081	2.3087778	2.3596334	2.3985399	2.4454036	2.4907338	2.5312144	2.5776019	2.6049268	2.6212974	2.6128521	2.5929966	2.5541911	2.4850315	2.3846164	2.2398881	2.0519684
11	2.2773184	2.3176168	2.3623230	2.4114334	2.4654938	2.5169028	2.5636148	2.6029587	2.6320785	2.6541947	2.6410201	2.6233534	2.5727797	2.4978370	2.3940200	2.2594638	2.0662277
12	2.2835825	2.3248232	2.3736103	2.4291678	2.4889757	2.5454222	2.5914240	2.6250857	2.6516673	2.6643972	2.6523425	2.6004997	2.5839052	2.5000775	2.3989784	2.2619378	2.0680303
13	2.2848925	2.3248232	2.3736103	2.4291678	2.4889757	2.5454222	2.5914240	2.6250857	2.6516673	2.6643972	2.6523425	2.6004997	2.5839052	2.5000775	2.3989784	2.2619378	2.0680303
14	2.2810542	2.3243912	2.3709942	2.4443880	2.5027149	2.5489590	2.5866736	2.6133324	2.6285906	2.6333234	2.6232652	2.6144190	2.5636479	2.5031728	2.3975355	2.2555049	2.0633668
15	2.2715604	2.3135352	2.3689600	2.4315714	2.4863355	2.5293391	2.5678495	2.5780903	2.5868703	2.5864589	2.5761812	2.55529484	2.5113846	2.4425945	2.3437258	2.2176765	2.0304196
16	2.2547758	2.2946896	2.3442212	2.4043730	2.4487785	2.4814846	2.5114511	2.5250055	2.5272883	2.5250055	2.5272883	2.4929968	2.4545564	2.3921605	2.30		

*E-02	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1.530007	1.291764	1.2980780	1.3461971	1.3883956	1.4267927	1.4634582	1.5016481	1.5315232	1.5598881	1.5857821	1.6087192	1.6292602	1.6536834	1.6791573	1.7097766	1.7474794
2	1.2137207	1.3173095	1.3853892	1.4401829	1.4866859	1.5281485	1.5687379	1.6078538	1.6457412	1.6824712	1.7180463	1.7527985	1.7858044	1.8180540	1.8495788	1.8798795	1.9197344
3	1.2601632	1.4723363	1.4486026	1.5067731	1.5573385	1.6044572	1.6483472	1.6894471	1.7279042	1.7648329	1.8002633	1.8342309	1.8667348	1.8978953	1.9277348	1.9562910	1.9836928
4	1.2982998	1.4173362	1.4960417	1.5599534	1.6132219	1.6630397	1.7093784	1.7474214	1.7810964	1.8165331	1.8462593	1.8739993	1.8998791	1.9266552	1.9553348	1.9811667	2.0031278
5	1.3313670	1.4532989	1.5366798	1.6035063	1.6574665	1.7069336	1.7510570	1.7920644	1.8297360	1.8662540	1.8960903	1.9229706	1.9582333	1.9844546	2.0151911	2.0492704	2.0869757
6	1.3585918	1.4841346	1.5689947	1.6373452	1.6943467	1.7477429	1.7982448	1.8381389	1.8720248	1.9018255	1.9374752	1.9703494	2.0008150	2.0295850	2.0608414	2.0944060	2.1335056
7	1.3811365	1.5078388	1.5952661	1.6651772	1.7237406	1.7750821	1.8213268	1.8653533	1.8992586	1.9402586	1.9732799	2.0054188	2.0365552	2.0696511	2.1099410	2.1545816	2.1945405
8	1.3988423	1.5276527	1.6157505	1.6868176	1.7464991	1.7992518	1.8465333	1.8892427	1.9295418	1.9670939	2.0026817	2.0368112	2.0695022	2.1018326	2.1375765	2.1745447	2.2145247
9	1.4132217	1.5427794	1.6317700	1.7036863	1.7646222	1.8184466	1.8653533	1.9064648	1.9514217	1.9881952	2.0216976	2.0548117	2.0858124	2.1145139	2.1458916	2.1786343	2.2145247
10	1.4240694	1.5529080	1.6434038	1.7164049	1.7779706	1.8370125	1.8797646	1.9231702	1.9645676	2.0033347	2.0376165	2.0705940	2.1040413	2.1380588	2.1665894	2.1944266	2.2293573
11	1.4357580	1.5650265	1.6562557	1.7296756	1.7916362	1.8456552	1.8939359	1.9380520	1.9788369	2.0162036	2.0513299	2.0957876	2.1145298	2.1407131	2.1722674	2.2051353	2.2397017
12	1.4411889	1.5688000	1.6590530	1.7318161	1.7939652	1.8463877	1.8950242	1.9398406	1.9787978	2.0166961	2.0519992	2.0838411	2.1153620	2.1467119	2.1784988	2.2120977	2.2465730
13	1.4428980	1.569547	1.6594509	1.7307067	1.7915092	1.8435685	1.8915467	1.9352934	1.9746332	2.0136327	2.0485256	2.0816439	2.1141884	2.1451884	2.1757534	2.2081650	2.2432340
14	1.4428980	1.569547	1.6594509	1.7307067	1.7915092	1.8435685	1.8915467	1.9352934	1.9746332	2.0136327	2.0485256	2.0816439	2.1141884	2.1451884	2.1757534	2.2081650	2.2432340
15	1.4428980	1.569547	1.6594509	1.7307067	1.7915092	1.8435685	1.8915467	1.9352934	1.9746332	2.0136327	2.0485256	2.0816439	2.1141884	2.1451884	2.1757534	2.2081650	2.2432340
16	1.4393686	1.5640217	1.6548074	1.7272158	1.7869666	1.8378289	1.8848413	1.9272320	1.9659928	2.0018695	2.0365246	2.0698974	2.1024376	2.1343334	2.1654249	2.1958047	2.2303352
17	1.4355775	1.5384064	1.6428074	1.7164688	1.7759666	1.8282268	1.8748413	1.9172320	1.9569928	1.9934575	2.0275534	2.0592436	2.0897741	2.1183377	2.1462429	2.1734030	2.2035352
18	1.4293201	1.5324633	1.6390852	1.7092116	1.7676118	1.8196356	1.8663653	1.9082695	1.9472062	1.9813492	2.0145442	2.0465186	2.0758852	2.1034153	2.1298437	2.1559426	2.1813515
19	1.4220835	1.5444137	1.6296876	1.6987745	1.7572715	1.8092636	1.8549216	1.8949617	1.9337847	1.9676167	1.9982679	2.0269052	2.0547097	2.0805071	2.1049939	2.1283342	2.1502429
20	1.4133160	1.5339278	1.6182764	1.6871763	1.7453091	1.7958742	1.8407996	1.8812910	1.9175787	1.9508519	1.9814001	2.0104686	2.0387143	2.0650002	2.0894224	2.1128383	2.1280031
21	1.4029081	1.5229192	1.6066248	1.6741954	1.7310288	1.7806946	1.8247063	1.8641305	1.8998650	1.9323311	1.9623776	1.9900804	2.0164552	2.0407774	2.0628309	2.0816282	2.0986003
22	1.3916398	1.5101943	1.5935452	1.6601360	1.7162686	1.7643200	1.8073101	1.8461101	1.8803305	1.9120921	1.9411937	1.9679427	1.9926099	2.0157861	2.0355910	2.0527935	2.0675749
23	1.3784251	1.4961629	1.5788806	1.6451850	1.7002792	1.7476220	1.7887248	1.8257899	1.8582874	1.8890349	1.9177120	1.9436618	1.9666738	1.9882296	2.0067894	2.0231457	2.0363075
24	1.3636064	1.4803479	1.5628320	1.6278320	1.6824805	1.7283892	1.7688115	1.8036806	1.8348985	1.8644121	1.8925055	1.9175027	1.9394569	1.9599744	1.9780061	1.9930311	2.0053656
25	1.3465908	1.4602325	1.5432148	1.6078836	1.6620410	1.7083246	1.7468907	1.7806836	1.8102770	1.8348475	1.8545833	1.8700880	1.8826335	1.9115510	1.9310880	1.9479629	1.9737845
26	1.3275636	1.4417975	1.5213732	1.5847855	1.6390652	1.6847308	1.7233114	1.7557052	1.7846805	1.8113229	1.8364927	1.8598328	1.8816656	1.9006603	1.9158910	1.9293138	1.9405006
27	1.3067533	1.4187092	1.4959760	1.5597351	1.6126462	1.6576701	1.6959242	1.7278601	1.7549476	1.7812106	1.8063066	1.8306467	1.8493934	1.8667060	1.8816972	1.8942271	1.9058030
28	1.2833818	1.3932156	1.4701199	1.5314244	1.5823510	1.6262362	1.6641166	1.6962151	1.7224651	1.7429621	1.7683371	1.7894611	1.8133171	1.8301693	1.8446161	1.8571595	1.8673407
29	1.2590999	1.3696961	1.4413359	1.5006299	1.5495310	1.5920305	1.6285907	1.6606125	1.6887030	1.7130679	1.7340755	1.7520772	1.7724811	1.7885925	1.8028042	1.8144638	1.8238846
30	1.2318719	1.3377071	1.4102467	1.4662301	1.5127872	1.5520310	1.5879319	1.6184114	1.6451507	1.6693447	1.6904967	1.7088290	1.7252684	1.7404517	1.7544156	1.7669610	1.7771274
31	1.2003931	1.3040036	1.3727945	1.4263251	1.4696021	1.5072956	1.5403597	1.5690668	1.5943538	1.6169978	1.6370461	1.6547053	1.6708127	1.6847332	1.6979961	1.7106204	1.7215091
32	1.1631642	1.2613570	1.3261285	1.3754986	1.4162348	1.4511867	1.4820335	1.5090025	1.5314415	1.5510025	1.5744415	1.5910025	1.6140025	1.6318557	1.6440266	1.6535450	1.6635265
33	1.1172576	1.2065041	1.2634411	1.3088709	1.3463268	1.3786832	1.4069490	1.4320291	1.4534697	1.4718557	1.4920696	1.5089500	1.5228049	1.5359204	1.5475228	1.5583644	1.5672365
34	1.0516420	1.1183224	1.1662406	1.2054588	1.2391572	1.2686176	1.2942413	1.3172182	1.3387918	1.3573857	1.3742877	1.3895786	1.4024313	1.4145474	1.4247865	1.4340655	1.4416664
*E-02	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1.7066866	1.4772371	1.8949047	1.9302601	1.9605085	1.9763603	1.9949826	2.0009618	2.0038923	1.9918214	1.9745479	1.9402288	1.9047733	1.8492758	1.7806353	1.6940747	1.5745858
2	1.9318876	1.9875415	2.0368272	2.0863226	2.1280638	2.1592273	2.1765606	2.1853807	2.1883580	2.1765950	2.1545142	2.1231488	2.0780541	2.0190336	1.9454405	1.8465107	1.6904609
3	2.0299697	2.0968298	2.1508699	2.2015116	2.2434352	2.2764242	2.2968378	2.3108880	2.3174446	2.3058878	2.2807944	2.2483338	2.1950577	2.1312625	2.0509900	1.9374862	1.7835948
4	2.1021876	2.1626360	2.2205930	2.2767632	2.3224907	2.3582342	2.3843339	2.3998901	2.4114155	2.3895121	2.3571045	2.3227590	2.2742980	2.2134000	2.0545127	1.8335983	1.5835939
5	2.1401876	2.2060002	2.2705390	2.3346852	2.3852060	2.4219216	2.4443936	2.4558291	2.4582016	2.4302016	2.4310907	2.3968091	2.3489072	2.2711210	2.1852910	2.0626391	1.8866314
6	2.1803223	2.2376406	2.3069147	2.3713170	2.4154744	2.4561946	2.4857689	2.4881791	2.4973669	2.4773717	2.4451036	2.3980032	2.3269488	2.2369859	2.1075920	1.9308174	1.6988825
7	2.2123777	2.2671448	2.3322219	2.3829141	2.4180863	2.4657291	2.4949029	2.5014355	2.5237168	2.5258461	2.5141333	2.4853026	2.4421086	2.3793985	2.2794192	2.1497329	1.9708825
8	2.2357714	2.2867955	2.3466485	2.4026012	2.4462673	2.4785187	2.4972225	2.5143780	2.5186078	2.5160007	2.5032872	2.4845905	2.4522770	2.3565791	2.1903771	2.1922886	2.0326572
9	2.2538781	2.2990347	2.3497570	2.3988815	2.4424765	2.4753006	2.5022266	2.5237931	2.5367319	2.5814781	2.5863361	2.5660038	2.5204021	2.4513451	2.2922826	2.0326572	1.7885450
10	2.2673794	2.3083225	2.3524783	2.3980224	2.4439514	2.4901442	2.5305825	2.5719237	2.6041946	2.6205061	2.6120129	2.5921412	2.5533434	2.4842059	2.3838244	2.2391521	2.0513152
11	2.2768934	2.3171657	2.3618421	2.4109187	2.4649937	2.5163022	2.5629622	2.6022542	2.6313231	2.6533825	2.6401621	2.6215041	2.5719110	2.4969946	2.3932155	2.2587182	2.0655708
12	2.2829355	2.3243757	2.3731313	2.4286486	2.4886093	2.5448037	2.5970493	2.6243592	2.6508924	2.6635749	2.6514798	2.6303196	2.5830289	2.4992325	2.3981751	2.2611967	2.0673785
13	2.2866442	2.3272203	2.3803085	2.4433564	2.5066645	2.5619918	2.6066645	2.6424781	2.6599618	2.6424593	2.6224593	2.5941390	2.5469221	2.4732271	2.3685042	2.2425152	2.0480004
14	2.2866442	2.3272203	2.3803085	2.4433564	2.5066645	2.5619918	2.6066645	2.6424781	2.6599618	2.6424593	2.6224593	2.5941390	2.5469221	2.4732271	2.3685042	2.2425152	2.0480004
15	2.2709584	2.3131072	2.3684971	2.4310536	2.4857567	2.5287143	2.5671947	2.579									

*E-02	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1.1529964	1.2391719	1.2980733	1.3461922	1.3883906	1.4267874	1.4634527	1.5016425	1.5315173	1.5599819	1.5877357	1.6087125	1.6292352	1.6536760	1.6791495	1.7097683	1.7474705
2	1.2137163	1.3173048	1.3853844	1.4401779	1.4866807	1.5281432	1.5687323	1.6078480	1.6459777	1.6747348	1.6948696	1.7237916	1.7450636	1.7684622	1.7957808	1.8298709	1.8797250
3	1.2609553	1.3729137	1.4468013	1.5067584	1.5633352	1.6079898	1.6445684	1.6838251	1.7190359	1.7486234	1.7804821	1.8081841	1.8329877	1.8564785	1.8836470	1.9203521	1.9696342
4	1.2982958	1.4173314	1.4964147	1.5599482	1.6132165	1.6603341	1.7037026	1.7424080	1.7810900	1.8165265	1.8462522	1.8793921	1.8998715	1.9266485	1.9515777	1.9915177	2.0361180
5	1.3313625	1.4532941	1.5366748	1.6035011	1.6574610	1.7069279	1.7510511	1.7920582	1.8297296	1.8662473	1.8969023	1.9229633	1.9558156	1.9844465	2.0151836	2.0492612	2.0896658
6	1.3583872	1.4841297	1.5689896	1.6373398	1.6943412	1.7477012	1.7989167	1.8313994	1.8570984	1.8773381	1.9013781	1.9203420	1.9400107	1.9629578	1.9860832	2.0149368	2.1334957
7	1.3811319	1.5078383	1.5952610	1.6651719	1.7237351	1.7750763	1.8213588	1.8636675	1.9029794	1.9402518	1.9737328	2.0054114	2.0352742	2.0696624	2.1299318	2.1681182	2.2455449
8	1.4132170	1.5427745	1.6317648	1.7036810	1.7646166	1.8144808	1.8655405	1.9066446	1.9513612	1.9881884	2.0216905	2.0548043	2.0875066	2.1305807	2.1450529	2.1786251	2.2145149
9	1.4432064	1.5752931	1.6643987	1.7163996	1.7779650	1.8307067	1.8797586	1.9231640	1.9645621	2.0033328	2.0376094	2.0705866	2.1040454	2.1385807	2.1616503	2.1944175	2.2293476
10	1.4742048	1.6092016	1.6983000	1.7503000	1.8118408	1.8655405	1.9144808	1.9645621	2.0033328	2.0548043	2.0966446	2.1305807	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476
11	1.5052032	1.6432000	1.7323000	1.7843000	1.8463000	1.9083000	1.9645621	2.0033328	2.0548043	2.0966446	2.1305807	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476
12	1.5362016	1.6782000	1.7673000	1.8193000	1.8813000	1.9433000	1.9993000	2.0548043	2.0966446	2.1305807	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476
13	1.5672000	1.7132000	1.8023000	1.8543000	1.9163000	1.9783000	2.0343000	2.0966446	2.1305807	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476	2.4207476
14	1.5982000	1.7482000	1.8373000	1.8893000	1.9513000	2.0133000	2.0693000	2.1305807	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476	2.4207476	2.4645476
15	1.6292000	1.7832000	1.8723000	1.9243000	1.9863000	2.0483000	2.1043000	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476	2.4207476	2.4645476	2.5083476
16	1.6602000	1.8142000	1.9033000	1.9553000	2.0173000	2.0793000	2.1353000	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476	2.4207476	2.4645476	2.5083476	2.5521476
17	1.6912000	1.8452000	1.9343000	1.9863000	2.0483000	2.1043000	2.1616503	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476	2.4207476	2.4645476	2.5083476	2.5521476
18	1.7222000	1.8762000	1.9653000	2.0173000	2.0793000	2.1353000	2.1944175	2.2293476	2.2455449	2.2893476	2.3331476	2.3769476	2.4207476	2.4645476	2.5083476	2.5521476	2.5959476
19	1.7532000	1.9072000	1.9963000	2.0483000	2.1103000	2.1663000	2.2243000	2.2843000	2.3463000	2.4093000	2.4733000	2.5383000	2.6043000	2.6713000	2.7393000	2.8083000	2.8783000
20	1.7842000	1.9382000	2.0273000	2.0793000	2.1413000	2.1973000	2.2573000	2.3193000	2.3833000	2.4483000	2.5143000	2.5813000	2.6493000	2.7183000	2.7883000	2.8593000	2.9313000
21	1.8152000	1.9692000	2.0583000	2.1103000	2.1723000	2.2283000	2.2883000	2.3503000	2.4143000	2.4793000	2.5453000	2.6123000	2.6803000	2.7483000	2.8173000	2.8873000	2.9583000
22	1.8462000	1.9992000	2.0883000	2.1403000	2.2023000	2.2583000	2.3183000	2.3803000	2.4443000	2.5093000	2.5753000	2.6423000	2.7103000	2.7783000	2.8483000	2.9193000	2.9913000
23	1.8772000	2.0302000	2.1193000	2.1713000	2.2333000	2.2893000	2.3493000	2.4113000	2.4753000	2.5403000	2.6063000	2.6733000	2.7413000	2.8093000	2.8793000	2.9513000	3.0233000
24	1.9082000	2.0612000	2.1503000	2.2023000	2.2643000	2.3203000	2.3803000	2.4423000	2.5063000	2.5713000	2.6373000	2.7043000	2.7723000	2.8403000	2.9103000	2.9823000	3.0543000
25	1.9392000	2.0922000	2.1813000	2.2333000	2.2953000	2.3513000	2.4113000	2.4733000	2.5373000	2.6023000	2.6683000	2.7353000	2.8033000	2.8713000	2.9413000	3.0133000	3.0853000
26	1.9702000	2.1232000	2.2123000	2.2643000	2.3263000	2.3823000	2.4423000	2.5043000	2.5683000	2.6333000	2.7003000	2.7673000	2.8353000	2.9033000	2.9733000	3.0453000	3.1173000
27	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
28	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
29	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
30	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
31	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
32	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
33	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
34	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
35	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
36	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
37	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
38	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
39	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
40	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
41	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
42	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
43	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
44	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
45	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
46	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
47	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
48	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430	1.4247820	1.4340609	1.4416618
49	1.0016387	1.1183190	1.1662370	1.2054551	1.2391555	1.2686138	1.2942374	1.3172143	1.3387878	1.3573816	1.3742835	1.3895743	1.4042720	1.4145430</			

*E-06	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	-0,7591640	-1,4533886	-1,4890190	-1,4998135	-1,4538711	-1,4564339	-1,4066250	-1,4061795	-1,4840799	-1,5061859	-1,7302953	-1,4539928	-1,5046117	-1,4558934	-1,4512551	-1,3899695	-1,4253350
2	-0,8653768	-1,6466835	-1,6949633	-1,6443681	-1,6500402	-1,6540503	-1,6514271	-1,6944085	-1,7203513	-1,6986162	-2,2638994	-1,6462032	-1,6540706	-1,7181365	-1,5113233	-1,4265435	-1,6401827
3	-0,8845372	-1,6748098	-1,7445002	-1,7520995	-1,7575279	-1,7555212	-1,7578259	-1,8206687	-1,8280687	-1,8248276	-2,0097841	-1,7538821	-1,7689049	-1,7458842	-1,7147884	-1,6609662	-1,6348148
4	-0,9252772	-1,6837082	-1,8051562	-1,7758259	-1,7661117	-1,7702963	-1,8053240	-1,8445958	-1,8445958	-1,8432546	-2,0383240	-1,8726464	-1,7726464	-1,7015535	-1,7597667	-1,4936563	-1,4395633
5	-0,9311113	-1,7516530	-1,8123330	-1,7631459	-1,8395253	-1,7799555	-1,7807591	-1,7822592	-1,8518203	-1,8515323	-2,0431460	-1,8530052	-1,8525940	-1,7934335	-1,7052719	-1,7726412	-1,7618053
6	-0,9685556	-1,7553770	-1,8156002	-1,8369988	-1,8453964	-1,7823176	-1,7835764	-1,7871102	-1,7880532	-1,7873871	-1,9863005	-1,8573596	-1,8574757	-1,8560025	-1,7836908	-1,7784777	-1,7716857
7	-0,9704193	-1,8175543	-1,8182070	-1,8780558	-1,8990017	-1,7853256	-1,7883554	-1,7902850	-1,7913802	-1,7916659	-1,9792625	-1,7916659	-1,7910231	-1,7896081	-1,7873757	-1,7550048	-1,7100549
8	-0,9713347	-1,7591391	-1,8198188	-1,7724800	-1,7811569	-1,7871388	-1,7903691	-1,7923996	-1,7936093	-1,7933362	-1,8634441	-1,7921051	-1,7933365	-1,7185680	-1,7154468	-1,7150049	-1,7100549
9	-0,9376903	-1,6953137	-1,7545033	-1,7738594	-1,7831597	-1,7612238	-1,7914888	-1,7933840	-1,7953383	-1,7953997	-1,9308822	-1,7217513	-1,7227802	-1,7185680	-1,7185680	-1,7150049	-1,7100549
10	-0,9028476	-1,6982476	-1,7554132	-1,7747073	-1,7840122	-1,78979357	-1,7213518	-1,7934611	-1,7958674	-1,7963948	-1,9326175	-1,7970402	-1,7963511	-1,7227023	-1,7210273	-1,721791	-1,7162847
11	-0,9032767	-1,6982476	-1,7554132	-1,7747073	-1,7840122	-1,78979357	-1,7213518	-1,7934611	-1,7958674	-1,7963948	-1,9326175	-1,7970402	-1,7963511	-1,7227023	-1,7210273	-1,721791	-1,7162847
12	-0,8679019	-1,6359040	-1,6888191	-1,7066010	-1,7533334	-1,7203328	-1,7233328	-1,7266485	-1,7259142	-1,7258321	-1,9202859	-1,7258321	-1,7258321	-1,7258321	-1,7258321	-1,7258321	-1,7191764
13	-0,8682718	-1,6362911	-1,6892085	-1,7069740	-1,7515087	-1,7195748	-1,6509133	-1,6536115	-1,7233994	-1,7267967	-1,6554147	-1,6565812	-1,6561795	-1,6552497	-1,6536143	-1,6498411	-1,7198356
14	-0,8684755	-1,6364925	-1,6893477	-1,7057729	-1,6455442	-1,5775345	-1,5815945	-1,5832586	-1,5830311	-1,5826109	-1,6554628	-1,5841891	-1,6553628	-1,6544407	-1,6544407	-1,6519384	-1,6465697
15	-0,8685559	-1,6364694	-1,6886761	-1,6378260	-1,5739752	-1,5796911	-1,5822844	-1,5832764	-1,5830609	-1,5852069	-1,6573705	-1,5851890	-1,6553628	-1,6544407	-1,6544407	-1,6519384	-1,6465697
16	-0,8674122	-1,6343204	-1,6216656	-1,6373103	-1,5762820	-1,5801151	-1,5824080	-1,5841688	-1,5850616	-1,5861712	-1,5863277	-1,5861926	-1,6573705	-1,6548880	-1,6548880	-1,6519384	-1,6465697
17	-0,7957234	-1,5086488	-1,6218345	-1,6373103	-1,5762820	-1,5801151	-1,5824080	-1,5841688	-1,5850616	-1,5861712	-1,5863277	-1,5861926	-1,6573705	-1,6548880	-1,6548880	-1,6519384	-1,6465697
18	-0,8323933	-1,5728483	-1,6211113	-1,5678077	-1,5760402	-1,5801103	-1,5831493	-1,5845449	-1,5853556	-1,5864697	-1,6561288	-1,5864432	-1,6580112	-1,6570302	-1,6561918	-1,6554585	-1,6526182
19	-0,8321309	-1,5728549	-1,6205222	-1,5681920	-1,5752129	-1,5806763	-1,5131926	-1,5843882	-1,5852927	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,6586920	-1,5865197	-1,5865197	-1,5821889	-1,5821889
20	-0,8319659	-1,5724208	-1,6189013	-1,5685700	-1,5759737	-1,5797387	-1,5821534	-1,5838893	-1,5849602	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,6586920	-1,5865197	-1,5865197	-1,5821889	-1,5821889
21	-0,8315071	-1,5086488	-1,5533627	-1,4980832	-1,5052224	-1,5092437	-1,5117412	-1,4389698	-1,4413899	-1,4421556	-1,4421556	-1,4421556	-1,5142927	-1,5142927	-1,5142927	-1,5142927	-1,5139909
22	-0,7964562	-1,5086181	-1,5534216	-1,5681551	-1,5049391	-1,5091962	-1,5116717	-1,4393512	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5130821
23	-0,7963763	-1,5084045	-1,5532062	-1,5682204	-1,5049391	-1,5091962	-1,5116717	-1,4393512	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5143882	-1,5130821
24	-0,7960744	-1,5080748	-1,5528589	-1,5678761	-1,5742630	-1,5774508	-1,5108701	-1,4398568	-1,4418790	-1,4425523	-1,4417299	-1,4425523	-1,5153477	-1,5153477	-1,5153477	-1,5153477	-1,5139909
25	-0,7952129	-1,5075597	-1,5523454	-1,5672575	-1,5742630	-1,5774508	-1,5108701	-1,4398568	-1,4418790	-1,4425523	-1,4417299	-1,4425523	-1,5153477	-1,5153477	-1,5153477	-1,5153477	-1,5139909
26	-0,7943732	-1,5067859	-1,5514573	-1,5651771	-1,5738519	-1,5780189	-1,5803899	-1,5094763	-1,4397052	-1,4412501	-1,4416833	-1,5123888	-1,5141028	-1,5141619	-1,5140644	-1,5138339	-1,5134613
27	-0,7583439	-1,4412465	-1,4955555	-1,5726715	-1,5768903	-1,5793922	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148	-1,5799148
28	-0,7570783	-1,4400239	-1,4811329	-1,4941833	-1,5710721	-1,5743710	-1,5771261	-1,5785126	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684	-1,5093684
29	-0,7557627	-1,4387969	-1,5463876	-1,4921470	-1,4986000	-1,5016289	-1,5035155	-1,5764066	-1,5777755	-1,5780809	-1,5795655	-1,5791787	-1,5792244	-1,6478520	-1,5792244	-1,5786320	-1,5786320
30	-0,7531729	-1,4996044	-1,5465684	-1,5582020	-1,5649239	-1,5687740	-1,5711697	-1,5727059	-1,5737598	-1,5738667	-1,5744736	-1,5753579	-1,5754153	-1,5764642	-1,5755991	-1,5751106	-1,6444435
31	-0,7855770	-1,5579963	-1,6048405	-1,5805706	-1,5581447	-1,5616607	-1,5632106	-1,5649978	-1,5669992	-1,5674746	-1,5677025	-1,5677025	-1,4952105	-1,3680493	-1,6361384	-1,6375090	-1,6372746
32	-0,8119347	-1,6052960	-1,5914270	-1,6050856	-1,6112252	-1,6142825	-1,6167890	-1,6182296	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302	-1,6199302
33	-0,7875037	-1,5647022	-1,6058648	-1,5583378	-1,5636710	-1,5666710	-1,5686410	-1,5699528	-1,5707605	-1,5718356	-1,5711612	-1,5711612	-1,5711612	-1,6354436	-1,6354436	-1,6354436	-1,6354436
34	-0,4356956	-0,8197946	-0,8463239	-0,8552897	-0,8597656	-0,8623958	-0,8632755	-0,8637595	-0,8307806	-0,8664214	-0,8317286	-0,8313319	-0,8677350	-0,8668079	-0,9021518	-0,9029394	-0,9028202
*E-06	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	-1,4213019	-1,7732547	-1,8607508	-2,1420790	-2,1978410	-2,6501846	-2,8700832	-3,0860256	-3,0887543	-3,1282686	-3,0826323	-3,1122630	-2,9816764	-3,0381951	-3,0256441	-2,9112215	-2,3621408
2	-2,5002552	-3,0965997	-3,4031866	-3,694710	-3,2142364	-3,2175418	-3,528740	-3,7474845	-3,8075352	-3,8567798	-3,8511123	-3,7307502	-3,7206948	-3,6905446	-3,5292276	-3,2600403	-2,7633757
3	-2,1406033	-2,4757263	-3,4233868	-3,4762062	-3,5521912	-3,4233868	-3,8695114	-3,9839295	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052	-3,9287052
4	-1,5334770	-2,1828916	-3,0028958	-3,805126	-3,4167601	-3,4930971	-3,5484161	-3,3419270	-3,5923186	-3,9923186	-3,8045185	-3,6725296	-3,6549028	-3,7606588	-3,2015799	-2,9925933	-2,5951946
5	-1,7425264	-1,6693441	-2,5208476	-2,8132508	-3,1775998	-3,4545636	-3,3845240	-3,7482029	-3,8342865	-3,8341833	-3,7107880	-3,8542427	-3,4285823	-3,2933070	-3,1066569	-2,6102133	-2,1021133
6	-1,7590241	-1,7248632	-2,0244480	-2,109554	-3,4223984	-3,4571150	-3,5784020	-3,6331616	-3,5083500	-3,5179163	-3,4604920	-3,4620405	-3,4513449	-3,4287643	-3,3064127	-3,2632594	-2,6633811
7	-1,7676516	-1,6586809	-2,2346293	-2,3151953	-3,6323027	-3,7551155	-3,8853524	-3,9958182	-2,5257903	-2,8841650	-3,1939182	-3,4028044	-3,3926939	-3,4352831	-3,4399476	-3,3583484	-2,7115005
8	-1,8436695	-1,7521566	-2,0986480	-2,8685374	-3,0160576	-2,309818	-1,9765658	-1,9692662	-2,5499123	-2,7404407	-3,1781441	-3,3315916	-3,6253353	-3,6253380	-3,4195676	-2,8015518	-2,8015518
9	-1,7780629	-1,7668704	-1,7350638	-2,0918718	-2,0832027	-1,5716912	-1,5720220	-1,9028653	-2,5499123	-3,1781441	-3,3315916	-3,6253353	-3,6253380	-3,4195676	-2,8015518	-2,8015518	-2,8015518
10	-1,7102238	-1,7735434	-1,6630135	-1,6381981	-1,6611759	-2,1824314	-2,4580662	-3,0239153	-3,4488001	-3,7110629	-4,2624799	-4,2895131	-4,0417128	-3,8858877	-3,8152911	-3,7540671	-2,9338046
11	-1,7125708	-1,7761111	-1,7646947	-1,6590532	-1,6843708	-2,2613668	-2,8200576	-3,1681811	-3,4488001	-3,7110629	-4,2624799	-4,2895131	-4,0417128	-3,8858877	-3,8152911	-3,7540671	-2,9338046
12	-1,7133538	-1,7577303	-1,7591792	-2,0830823	-2,4177481	-2,2608783	-3,2433627	-3,7462072	-3,9407380	-4,3159878	-4,6905409	-4,2377846	-4,2377846	-4,2498825	-4,0555607	-3,7082291	-2,8900508
13	-1,7133830	-1,7751721	-1,7478660	-2,2718626	-2,8914887	-3,2406962	-3,5938692	-3,8071021	-3,9466384	-4,3159878	-4,6905409	-4,2377846	-4,2377846	-4,2498825	-4,0555607	-3,7082291	-2,8900508
14	-1,7140724	-1,7753738	-1,7362586	-2,3761877	-3,3647285	-3,8509477	-3,9047374	-3,8101890	-3,8109499	-3,8066683	-3,9355308	-4,1627331	-4,0117130	-3,8805684	-3,6516841	-3,4731423	-2,8035669
15	-1,7148783	-1,7733717	-1,7265689	-2,6650690	-3,5159807	-3,7402575	-3,4486770										





*E-06	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	-0.7547529	-1.4449938	-1.4802937	-1.4910527	-1.4457485	-1.4483069	-1.4485137	-1.3986747	-1.4756254	-1.4974810	-1.7183114	-1.4458966	-1.4959445	-1.4478689	-1.44433055	-1.3828047	-1.4178204
2	-0.8607387	-1.6373092	-1.6854118	-1.6555167	-1.6411743	-1.6451689	-1.6425969	-1.6851132	-1.7107599	-1.6893044	-2.2465412	-1.6374995	-1.6452797	-1.7086462	-1.5041119	-1.4202628	-1.6318310
3	-0.8794438	-1.6665320	-1.7347680	-1.7347680	-1.7572025	-1.8193246	-1.8193246	-1.8193246	-1.8338336	-1.8143696	-1.9969710	-1.7442331	-1.6801331	-1.6789567	-1.7363693	-1.5928434	-1.6267723
4	-0.9204524	-1.7462078	-1.7946676	-1.7480444	-1.7563021	-1.7607194	-1.7629740	-1.8359494	-1.8338336	-1.8359494	-2.0252665	-1.7581443	-1.7629070	-1.6925224	-1.7581443	-1.7025289	-1.4354277
5	-0.9257594	-1.7413687	-1.8018211	-1.7533551	-1.8289202	-1.7681064	-1.7709048	-1.8409111	-1.8411818	-1.8409111	-2.0301465	-1.8423905	-1.8419967	-1.7696062	-1.6963800	-1.7630405	-1.7523891
6	-0.9627807	-1.7450754	-1.8050710	-1.8257889	-1.7724661	-1.7755046	-1.7724661	-1.7755046	-1.7781866	-1.7755046	-1.9740899	-1.8467344	-1.8466622	-1.8454212	-1.7739622	-1.7688389	-1.6927311
7	-0.9646579	-1.8067654	-1.8076668	-1.8077300	-1.7700431	-1.7753398	-1.7784719	-1.7804007	-1.7814999	-1.7818152	-1.7816478	-1.7818152	-1.7818152	-1.7798338	-1.7778502	-1.7744043	-1.6967333
8	-0.9635533	-1.7488224	-1.8092729	-1.7626459	-1.7772507	-1.7772507	-1.7804531	-1.7835073	-1.7835073	-1.7835073	-1.8528381	-1.7835073	-1.7835073	-1.7704434	-1.7095894	-1.7092360	-1.7012349
9	-0.9323152	-1.6859761	-1.7447330	-1.7732883	-1.7071327	-1.7039077	-1.7039077	-1.7039077	-1.7839368	-1.7839368	-1.9142929	-1.7860299	-1.7121719	-1.7137447	-1.7120293	-1.7092360	-1.7047939
10	-0.8978740	-1.6886849	-1.7456387	-1.7648641	-1.7741383	-1.7780613	-1.7722386	-1.7835756	-1.7859719	-1.7865074	-1.9211537	-1.7816985	-1.7865001	-1.7152195	-1.7136994	-1.7112034	-1.7073957
11	-0.8983020	-1.6877012	-1.6778736	-1.7651180	-1.7731236	-1.7710594	-1.7713497	-1.7715706	-1.7716720	-1.7716720	-1.9089672	-1.7717640	-1.7716720	-1.7162991	-1.7148931	-1.7126377	-1.7109486
12	-0.8633158	-1.6270726	-1.6798005	-1.6975224	-1.7062270	-1.7111954	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466	-1.7142466
13	-0.8636836	-1.6274576	-1.6801878	-1.6978937	-1.7059077	-1.7104643	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190	-1.6425190
14	-0.8638863	-1.6276582	-1.6803268	-1.6966619	-1.6371398	-1.5698909	-1.5739325	-1.5759664	-1.5759664	-1.5759664	-1.6478401	-1.6478401	-1.6478401	-1.6478401	-1.6478401	-1.6478401	-1.6478401
15	-0.8639666	-1.6276361	-1.6796630	-1.6294834	-1.5663356	-1.57270265	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157	-1.57346157
16	-0.8628352	-1.6255098	-1.6133736	-1.6289871	-1.5683484	-1.5724464	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379	-1.5747379
17	-0.7918791	-1.5647210	-1.6135407	-1.629728	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729
18	-0.8281819	-1.5647210	-1.6128242	-1.601764	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729	-1.5683729
19	-0.8279214	-1.5647268	-1.6122402	-1.605559	-1.5675587	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935	-1.5727935
20	-0.8277611	-1.5631277	-1.6106340	-1.5609290	-1.5683075	-1.5726095	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826	-1.5744826
21	-0.8273016	-1.5011985	-1.5457683	-1.4911247	-1.4979585	-1.5022023	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241
22	-0.7925998	-1.5011663	-1.5458247	-1.5605143	-1.4979585	-1.5022023	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241	-1.5047241
23	-0.7925188	-1.5009526	-1.5456090	-1.5605764	-1.5675422	-1.5016844	-1.5043929	-1.4331845	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963	-1.5061963
24	-0.7922173	-1.5006233	-1.5452620	-1.5602321	-1.5679702	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920	-1.5697920
25	-0.7922640	-1.5007997	-1.5447496	-1.5596152	-1.5666015	-1.5710485	-1.5721766	-1.4326374	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440	-1.4350440
26	-0.7902523	-1.4993389	-1.5438650	-1.5575493	-1.5661886	-1.5703437	-1.5727103	-1.5024191	-1.4333683	-1.4349059	-1.4333683	-1.4333683	-1.4333683	-1.4333683	-1.4333683	-1.4333683	-1.4333683
27	-0.7548362	-1.4346341	-1.5403225	-1.4885977	-1.5650117	-1.5692177	-1.5717135	-1.5722435	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210	-1.5043210
28	-0.7535760	-1.4323272	-1.4742157	-1.4872293	-1.5625522	-1.5667109	-1.5694824	-1.5023735	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529	-1.5720529
29	-0.7522640	-1.4320182	-1.4581988	-1.4851988	-1.4916915	-1.4946625	-1.5673495	-1.5687925	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174
30	-0.7494683	-1.4320182	-1.4581988	-1.4851988	-1.4916915	-1.4946625	-1.5673495	-1.5687925	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174	-1.5704174
31	-0.7817524	-1.5499132	-1.5965064	-1.5429876	-1.5505296	-1.5403032	-1.5555853	-1.5573653	-1.5586627	-1.5598909	-1.5598909	-1.5598909	-1.5598909	-1.5598909	-1.5598909	-1.5598909	-1.5598909
32	-0.8078788	-1.5966821	-1.5822822	-1.5968393	-1.6029595	-1.6090100	-1.6095065	-1.6099431	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046	-1.6110046
33	-0.7834378	-1.5561243	-1.5871464	-1.5502516	-1.5552672	-1.5585638	-1.5618291	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285	-1.5626285
34	-0.4333956	-0.8155713	-0.88418065	-0.8520007	-0.8552007	-0.8578244	-0.8587075	-0.85891953	-0.8265687	-0.8618411	-0.8275154	-0.8271258	-0.8631508	-0.8635021	-0.8971960	-0.8979766	-0.8978598
*E-06	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	-1.4140271	-1.7607324	-1.8468738	-2.1227557	-2.1773815	-2.6188648	-2.8374117	-3.0441711	-3.0426442	-3.0666078	-2.9941130	-2.9807685	-2.9941130	-2.9807685	-2.8674188	-2.3262327	-2.3262327
2	-2.4786828	-3.062160	-3.3612522	-3.3290874	-3.1780179	-3.1813012	-3.4816465	-3.6968382	-3.7551144	-3.8027485	-3.6701152	-3.6402144	-3.6701152	-3.6402144	-3.4243132	-2.7247555	-2.7247555
3	-2.1261226	-2.7525935	-3.3838452	-3.4357523	-3.5099718	-3.5778915	-3.6987553	-3.8189300	-3.9300353	-3.8763430	-3.8704537	-3.7450531	-3.7823629	-3.6920312	-3.4663612	-3.2233685	-3.2233685
4	-2.0268367	-2.1682333	-2.9736536	-3.3788057	-3.4534142	-3.5074569	-3.6717470	-3.8848389	-3.9395696	-3.7567470	-3.6280722	-3.5105769	-3.5214997	-3.4079441	-3.1649010	-2.5615869	-2.5615869
5	-1.7334518	-1.6014038	-2.8882628	-3.1453266	-3.4162320	-3.5431129	-3.7863731	-3.8468118	-3.7863731	-3.6660851	-3.5300741	-3.3904741	-3.3703448	-3.2699348	-3.1690515	-2.6315215	-2.6315215
6	-1.7497402	-1.761412	-2.012044	-2.7861134	-3.3848445	-3.4188985	-3.5372622	-3.5906197	-3.4686818	-3.4221215	-3.4235042	-3.2812061	-3.3863945	-3.2699506	-3.1993015	-2.6315215	-2.6315215
7	-1.7582625	-1.6506746	-2.2194155	-3.2796041	-3.5904043	-3.388974	-2.8620839	-2.6900704	-2.5062596	-2.8581152	-3.1615871	-3.657858	-3.356690	-3.3941883	-3.4004432	-3.3184336	-2.6784434
8	-1.8333752	-1.7430559	-2.0853822	-2.8425309	-2.9871885	-2.3145177	-1.9652073	-1.4028365	-1.9460911	-1.7271528	-3.1553344	-3.2962969	-3.4189546	-3.3825828	-3.5853752	-3.3781568	-2.7660376
9	-1.8675390	-1.7575523	-2.0768093	-2.0702428	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668	-1.57210668
10	-1.7014438	-1.7641219	-1.7510840	-1.6550464	-1.6306580	-1.6533865	-2.1681870	-2.4397040	-2.9533381	-3.6498317	-4.2034776	-4.2296648	-3.986171	-3.8363507	-3.7663289	-3.7033747	-2.8944866
11	-1.7037628	-1.7554489	-1.6511285	-1.6764008	-2.2459321	-2.7953214	-3.1366422	-3.411923	-3.6672803	-4.240136	-4.2572553	-4.1733143	-4.0806507	-4.0041616	-3.6589169	-2.8528695	-2.8528695
12	-1.7047197	-1.7500227	-1.7500227	-2.0700181	-2.3998729	-2.7372694	-3.2102324	-3.5629597	-3.7016369	-3.8911763	-4.6179731	-4.1792235	-4.0898043	-3.6589860	-3.6589860	-3.6589860	-3.6589860
13	-1.7050153	-1.7657526	-1.7389120	-2.2561922	-2.8654071	-3.2076615	-3.5548726	-3.7615804	-3.8969595	-4.0790079	-4.2419435	-4.3336567	-3.9587859	-3.8298614	-3.6040725	-2.8100019	-2.8100019
14	-1.7052570	-1.7641869	-1.7275112	-2.3589934	-3.285721	-3.8031863	-3.8559146	-3.7639781	-3.760576	-3.8859315	-4.0610638	-4.1062424	-4.0010846	-3.9201424	-3.4304509	-2.7681472	-2.7681472
15	-1.7060507	-1.7639902	-1.7179946	-2.6409134	-3.4762760	-3.6953590	-3										

# CONCLUSIONI

La tesi affronta e approfondisce il tema delle applicazioni dei metodi computazionali in geodesia finalizzate al calcolo analitico degli effetti della gravità, potenziale gravitazionale e le sue derivate prime e seconde, dovuti a determinate distribuzioni di masse di corpi discretizzabili con modelli prismatici e poliedrici aventi densità costanti e variabili attraverso una legge polinomiale di grado assegnato.

La Teoria del Potenziale descrive matematicamente non solo l'attrazione gravitazionale ma anche una vasta serie di fenomeni, compresi i campi magnetostatici ed elettrostatici, campi generati da correnti elettriche uniformi, trasferimento di calore costante attraverso un mezzo omogeneo, flusso costante di fluidi ideali, comportamento dei solidi elastici, moto instabile dell'onda d'acqua e la teoria delle funzioni complesse.

L'attrazione gravitazionale è ciò che interessa nell'ambito di questo studio. Costituisce un campo vettoriale, ma gli strumenti geofisici, generalmente, misurano solo una componente del vettore e quella singola componente costituisce un campo scalare.

La componente principale della gravità misurata dai gravimetri e utilizzata nella maggior parte delle analisi di gravità è l'intensità  $F_z$  della forza per unità di massa nella direzione verticale, che in letteratura è spesso indicata dal simbolo speciale  $g$ . Recenti progressi nella misurazione della gravità e nella realizzazione di strumentazioni e procedure hanno rinnovato l'interesse nell'utilità dell'uso delle componenti vettoriali e dei gradienti dei loro tensori. Le componenti del gradiente del tensore sono utili per migliorare l'identificazione e la risoluzione delle fonti anomale.

Gli effetti della gravità di corpi idealizzati tridimensionali e bidimensionali sono determinabili attraverso il calcolo di integrali tridimensionali imponendo determinate condizioni al contorno.

Una vasta letteratura fornisce i valori degli effetti della gravità per corpi variamente modellati attraverso equazioni che sono affette da errori dovuti alle limitate assunzioni di base. In generale gli effetti della gravità su un corpo esteso e variamente articolato vengono determinati suddividendo il corpo in lamine e sommando gli effetti di tutte le sezioni laminari rispetto al punto di osservazione. In questo modo il problema da tridimensionale diviene bidimensionale. Il metodo della linea di integrazione fu adottato sin dagli anni '60. Tuttavia, l'integrazione numerica risultava più facile con il metodo di quadratura Gaussiano. Dalla relazione intercorrente tra campo e potenziale

## CONCLUSIONI

gravitazionale, utilizzando il teorema della divergenza si ottiene l'equazione di Poisson che ci permette di determinare il potenziale gravitazionale a partire dalla densità della distribuzione di massa. La risoluzione dell'equazione di Poisson non può prescindere dal corretto utilizzo di condizioni al contorno, cioè che il potenziale diventi nullo quando la distanza dalla massa diventi infinita. Infatti, dall'equazione di Poisson, integrando membro a membro su un volume arbitrario  $V$  contenente una massa  $M$  e applicando il teorema della Divergenza, si ottiene il teorema di Gauss che permette di determinare il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa  $S$  contenente una determinata massa  $M$ . Tuttavia il teorema di Gauss mette in relazione in modo univoco l'integrale della fonte con la massa, ma non ci informa delle caratteristiche e della distribuzione della massa stessa.

La difficoltà consiste nel cercare di approssimare formazioni geologiche complicate attraverso forme geometriche in cui le forme stesse siano sufficientemente semplici da rendere l'integrale di volume, ottenuto attraverso l'elaborazione di quello del teorema di Gauss, suscettibile di poter essere calcolato automaticamente. Si tratta essenzialmente di considerare sorgenti gravitazionali e la ipotetica sorgente suddivisa in  $N$  parti più semplici.

Una sequenza di prismi rettangolari fornisce un modo semplice per approssimare il volume di una determinata massa. Se ciascun prisma è abbastanza piccolo, si può presumere che ognuno di essi abbia una densità costante. Poi, per il principio di sovrapposizione, l'anomalia gravitazionale del corpo in qualsiasi punto potrebbe essere approssimata sommando gli effetti di tutti i prismi.

Sebbene concettualmente semplice, l'approccio appena menzionato sarebbe non praticabile. Infatti, le formazioni geologiche sono spesso difficili da modellare con blocchi rettangolari. Inoltre, il calcolo non ne trae vantaggio dal fatto che, se le densità dei prismi vicini sono identiche, non è necessario includere la loro interfaccia reciproca nel calcolo.

Un metodo più pratico venne successivamente descritto da Talwani ed Ewing. La loro tecnica si avvicina alla modellazione di un corpo costituito da una pila di lamine infinitamente sottili. La forma di ciascuna lamina è approssimata da un poligono e i confini poligonali delle singole lamine sono rilevabili da mappe topografiche di contorno. Un modo più utile per approssimare le situazioni geologiche è sostituire la forma della sezione trasversale di corpi bidimensionali con poligoni semplificati.

Gli effetti della gravità di corpi idealizzati tridimensionali e bidimensionali sono determinabili attraverso il calcolo di integrali imponendo determinate condizioni al contorno. In generale gli effetti della gravità su un corpo esteso e variamente articolato

## CONCLUSIONI

vengono determinati suddividendo il corpo in sezioni laminari e sommando gli effetti di tutte le sezioni rispetto al punto di osservazione.

Le sorgenti idealizzate 2D e 3D sono state ampiamente modellate utilizzando, rispettivamente, lamine verticali e pile verticali di lamine orizzontali che attraversano un corpo dalla forma irregolare. In entrambi i casi, la lamina è approssimata da un poligono con bordi lineari il cui effetto gravitazionale coinvolge completamente gli elementi geometrici descritti dalle coordinate del punto finale dell'elemento di linea.

La sorgente allungata di lunghezza finita è ampiamente utilizzata per la modellazione interattiva del vettore gravitazionale e dei componenti dei tensori vettoriali. La legge di Gauss e le equazioni di Laplace e Poisson sono utili per comprendere la natura dei campi.

Tuttavia, le espressioni analitiche formulate in passato da diversi autori generano singolarità quando il calcolo del potenziale viene determinato in corrispondenza degli spigoli del prisma. Una situazione simile si verifica allorquando siamo dinanzi a corpi di forma poliedrica. Recenti formulazioni sono state elaborate per il calcolo del potenziale e del suo gradiente nel caso in cui il punto di osservazione P coincida con un vertice del corpo prismatico. Le formule ottenute, grazie all'applicazione del teorema di Gauss, mostrano come considerare nel modo più pertinente le singolarità.

Le formule riportate nel capitolo 4 sono state oggetto di applicazioni computazionali per il calcolo degli effetti gravitazionali per un corpo di forma prismatica e poliedrica; i risultati non conteranno singolarità.

L'approccio utilizzato per il calcolo degli effetti gravitazionali dei corpi poliedrici con densità uniforme può essere esteso al caso di corpi con densità variabile linearmente, valutando attentamente le relative singolarità. Il poliedro a densità costante è stato più volte ripetutamente analizzato. Tuttavia l'ipotesi della densità costante è poco realistica. Basterà considerare il fatto che, per esempio, un bacino sedimentario ha subito nel corso della sua evoluzione geologica una compattazione, per cui la densità in generale aumenta con la profondità. Questa considerazione ha spinto diversi autori a studiare gli effetti gravitazionali prodotti su corpi che hanno una densità variabile linearmente in due o tre dimensioni.

Peraltro, dalle variazioni di densità in senso verticale, nella direzione della profondità, diversi autori hanno iniziato a considerare distribuzioni di densità più complesse sia in senso verticale che orizzontale. Il problema della modellazione dei corpi è divenuto di fondamentale importanza, sicché dalla modellazione di corpi in forma prismatica si è passati a modellazioni di corpi in forma poliedrica.

## CONCLUSIONI

Gli approcci illustrati affrontano qualsiasi fonte di singolarità in modo indipendente dalla posizione del punto P di osservazione rispetto al corpo prismatico o poliedrico. Le applicazioni dei metodi computazionali illustrate risultano essere più efficaci dal punto di vista del calcolo e dei tempi di esecuzione rispetto agli analoghi presenti in letteratura scientifica. Tutto ciò quandanche il punto P risulti coincidente con un angolo del prisma.

Gli approcci computazionali relativi a corpi poliedrici per la determinazione e la valutazione di effetti gravitazionali si basano sulle applicazioni ripetute del teorema di Gauss. Gli effetti delle singolarità che si presentano nello sviluppo dei calcoli possono essere affrontati senza la necessità a posteriori di introdurre coefficienti correttivi nelle formule finali, come spesso accade in altrettanti approcci reperibili in letteratura.

Più in particolare viene dimostrato che, ad eccezione del calcolo della derivata seconda del potenziale, le singolarità possono essere escluse sia per il potenziale gravitazionale che per la sua derivata del primo ordine.

Le formule analitiche analizzate permettono di determinare gli effetti della gravità di corpi poliedrici come somma di integrali unidimensionali estesi ai loro lati.

Le formule indicate per il calcolo del potenziale e delle sue derivate di primo e secondo ordine sono sempre ben definite a meno che il punto di osservazione appartenga ad una linea contenente un bordo del poliedro; infatti in questo caso la derivata seconda del potenziale mostra una singolarità.

Le formule analitiche esaminate sono state implementate in codici Matlab®. I codici sono stati dapprima convalidati attraverso l'esecuzione di test di base, successivamente impiegati nel calcolo degli effetti di gravità indotti da modelli poliedrici, con ordine di complessità crescente.

Gli approcci individuati nei paragrafi della tesi, basati sulla teoria della distribuzione e sul calcolo differenziale, sono stati impiegati anche per affrontare e risolvere le singolarità che interessano gli integrali necessari a calcolare gli effetti gravitazionali di corpi poliedrici con densità variabile.

Per quanto esaminato e approfondito nel paragrafo relativo alle soluzioni numeriche per la determinazione e il calcolo degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno, DTM, la procedura si basa sull'applicazione ripetuta del teorema di Gauss, considerando domini rappresentati da forme poliedrali, come indicato ampiamente nel capitolo 8.

Il codice di calcolo implementato in Matlab® è stato testato e specificatamente applicato al caso di un DTM di un'area geografica in prossimità del territorio del Comune di Cassino, nella zona sud del comune stesso.

## CONCLUSIONI

In particolare sono state prese in esame sia la modellazione prismatica che quella poliedrica del terreno, per gli elementi del modello digitale del terreno a disposizione, per le quali sono state ricavate i valori del potenziale e della sua derivata prima. I risultati ottenuti attraverso l'algoritmo in ambiente Matlab  $\square$  hanno dimostrato che le formule implementate sono particolarmente efficienti fino a risolvere le singolarità che invece appaiono frequentemente in letteratura in casi analoghi.

I risultati sono stati ottenuti sia nell'ipotesi di densità costante del terreno che in quella di densità variabile con legge polinomiale fino al 4° grado.

I poliedri utilizzati nella discretizzazione del terreno sono stati suddivisi in sette facce al fine di ottenere una migliore accuratezza nei calcoli.

Il potenziale calcolato nei 1156 punti di osservazione, attraverso l'applicazione del teorema di Gauss, si riconduce al calcolo di più integrali di superficie e, successivamente, a quello di più integrali di linea.

Sono stati calcolati 30.400 integrali, sfruttando la possibilità di trascurare il calcolo di quegli integrali che presentano facce in comune con altri poliedri, caratterizzati da versori normali uscenti di segno opposto.

Sono stati calcolati i valori del potenziale e della derivata prima (gravità; g) per i punti di un DTM di ampiezza 10 Km x 10 Km considerando una modellazione prismatica e poliedrica a densità costante.

Inoltre per un DTM ridotto di ampiezza 2 Km x 2 Km, considerando una modellazione prismatica, sono stati calcolati i valori del potenziale e della derivata prima in 1156 punti di osservazione (punti attratti) caratterizzati da valori di densità variabile.

Infine in corrispondenza del valore del potenziale massimo, localizzato nel punto a quota maggiore, sono state elaborate le rappresentazioni grafiche e n. 2 sezioni, in direzione x e y, per tutti i casi analizzati e caratterizzati da valori di densità da costante a variabile con legge polinomiale fino al quarto grado.

La derivata prima del potenziale è stata rappresentata graficamente per valori di densità costante e lineare.

## REFERENCES

- [1] R. J. Blakely, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. 1995.
- [2] T.A.A.B., “Foundations of Potential Theory. By O.D. Kellogg. Reprint. Pp.ix, 384. Paper, \$1.95; cloth \$3.95 1954. (Dover Publications, New York),” *Math. Gaz.*, vol. 39, no. 327, 1955, doi: 10.2307/3611139.
- [3] S. A. H. Hinze P.W.J. von Frese R.R.B., *Gravity and Magnetic Exploration Principles, Practices and Applications*. 2013.
- [4] D. Plouff, “Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections,” *Geophysics*, vol. 41, no. 4, 1976, doi: 10.1190/1.1440645.
- [5] M. Talwani and M. Ewing, “RAPID COMPUTATION OF GRAVITATIONAL ATTRACTION OF THREE-DIMENSIONAL BODIES OF ARBITRARY SHAPE,” *GEOPHYSICS*, vol. 25, no. 1, 1960, doi: 10.1190/1.1438687.
- [6] D. D., “ Interpretation Theory in Applied Geophysics. F. S. Grant and G. F. West. pp. xx + 583, figs. McGraw-Hill Book Co., New York, 1965. Price 140 s .,” *Geol. Mag.*, vol. 103, no. 2, 1966, doi: 10.1017/s0016756800050627.
- [7] E. Ziegel, W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling, “Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing,” *Technometrics*, vol. 29, no. 4, 1987, doi: 10.2307/1269484.
- [8] L. J. Peters, “The direct approach to magnetic interpretation and its practical application,” *Geophysics*, vol. 14, no. 3, 1949, doi: 10.1190/1.1437537.
- [9] M. K. Hubbert, “A LINE-INTEGRAL METHOD OF COMPUTING THE GRAVIMETRIC EFFECTS OF TWO-DIMENSIONAL MASSES,” *GEOPHYSICS*, vol. 13, no. 2, 1948, doi: 10.1190/1.1437395.
- [10] M. Talwani, J. L. Worzel, and M. Landisman, “Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone,” *J. Geophys. Res.*, vol. 64, no. 1, 1959, doi: 10.1029/jz064i001p00049.
- [11] R. Rummel, T. Gruber, J. Flury, and A. Schlicht, “ESA’s gravity field and steady-state ocean circulation explorer GOCE,” *ZfV - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinf. und Landmanagement*, vol. 134, no. 3, 2009.
- [12] M. G. D’Urso, “New Expressions of the Gravitational Potential and Its Derivatives for the Prism,” *Int. Assoc. Geod. Symp.*, vol. 137, pp. 251–256, 2012, doi: 10.1007/978-3-642-22078-4\_38.
- [13] M. G. D’Urso, “On the evaluation of the gravity effects of polyhedral bodies and a consistent treatment of related singularities,” *J. Geod.*, vol. 87, no. 3, pp. 239–252, 2012, doi: 10.1007/s00190-012-0592-1.
- [14] M. G. D’Urso, “Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies,” *J. Geod.*, vol. 88, no. 1, pp. 13–29, 2013, doi: 10.1007/s00190-013-0664-x.

- [15] M. Okabe, “ANALYTICAL EXPRESSIONS FOR GRAVITY ANOMALIES DUE TO HOMOGENEOUS POLYHEDRAL BODIES AND TRANSLATIONS INTO MAGNETIC ANOMALIES.,” *Geophysics*, vol. 44, no. 4, pp. 730–741, 1979, doi: 10.1190/1.1440973.
- [16] K.-T. Tang, *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3*. 2007.
- [17] M. G. D’Urso and F. Marmo, “Vertical stress distribution in isotropic half-spaces due to surface vertical loadings acting over polygonal domains,” *ZAMM Zeitschrift für Angew. Math. und Mech.*, vol. 95, no. 1, 2015, doi: 10.1002/zamm.201300034.
- [18] V. Pohánka, “Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density,” *Geophys. Prospect.*, vol. 46, no. 4, 1998, doi: 10.1046/j.1365-2478.1998.960335.x.
- [19] M. G. D’Urso, “Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density,” *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 120, no. 4, pp. 349–372, 2014, doi: 10.1007/s10569-014-9578-z.
- [20] X. Zhou, “2D vector gravity potential and line integrals for the gravity anomaly caused by a 2D mass of depth-dependent density contrast,” *Geophysics*, vol. 73, no. 6, 2008, doi: 10.1190/1.2976116.
- [21] X. Zhou, “General line integrals for gravity anomalies of irregular 2D masses with horizontally and vertically dependent density contrast,” *Geophysics*, vol. 74, no. 2, 2009, doi: 10.1190/1.3073761.
- [22] X. Zhou, “Analytical solution of gravity anomaly of irregular 2D masses with density contrast varying as a 2D polynomial function.,” *Geophysics 75:III–II9*, 2010.
- [23] Y. -K Kwok, “Singularities In Gravity Computation For Vertical Cylinders and Prisms,” *Geophys. J. Int.*, vol. 104, no. 1, 1991, doi: 10.1111/j.1365-246X.1991.tb02490.x.
- [24] D. Tsoulis and S. Petrović, “On the singularities of the gravity field of a homogeneous polyhedral body,” *GEOPHYSICS*, vol. 66, no. 2, pp. 535–539, Mar. 2001, doi: 10.1190/1.1444944.
- [25] M. G. D’Urso, “Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies,” *J. Geod.*, vol. 88, no. 1, 2014, doi: 10.1007/s00190-013-0664-x.
- [26] M. G. D’Urso and S. Trotta, “Comparative assessment of linear and bilinear prism-based strategies for terrain correction computations,” *J. Geod.*, vol. 89, no. 3, 2015, doi: 10.1007/s00190-014-0770-4.
- [27] M. G. D’Urso, “The Gravity Anomaly of a 2D Polygonal Body Having Density Contrast Given by Polynomial Functions,” *Surv. Geophys.*, vol. 36, no. 3, pp. 391–425, 2015, doi: 10.1007/s10712-015-9317-3.
- [28] L. Rosati and F. Marmo, “Closed-form expressions of the thermo-mechanical fields induced by a uniform heat source acting over an isotropic half-space,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 75, 2014, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.03.069.
- [29] X. Zhou, “Analytic solution of the gravity anomaly of irregular 2D masses with density contrast varying as a 2D polynomial function,” *Geophysics*, vol. 75, no. 2, 2010, doi: 10.1190/1.3294699.
- [30] X. Zhou, “3D vector gravity potential and line integrals for the gravity anomaly



- of a rectangular prism with 3D variable density contrast,” *Geophysics*, vol. 74, no. 6, 2009, doi: 10.1190/1.3239518.
- [31] X. Zhou, “On ‘Gravity anomalies of 2D bodies with variable density contrast’ (Jianzhong Zhang, Benshan Zhong, Xixiang Zhou, and Yun Dai, 2001, *GEOPHYSICS*, 66, 809-813),” *Geophysics*, vol. 74, no. 4, 2009, doi: 10.1190/1.3119482.
- [32] W. J. Johannes and P. L. Smilde, *Gravity interpretation: Fundamentals and application of gravity inversion and geological interpretation*. 2009.
- [33] Z. Ren, C. Chen, K. Pan, T. Kalscheuer, H. Maurer, and J. Tang, “Gravity Anomalies of Arbitrary 3D Polyhedral Bodies with Horizontal and Vertical Mass Contrasts,” *Surveys in Geophysics*, vol. 38, no. 2, 2017, doi: 10.1007/s10712-016-9395-x.
- [34] K. T. Tang, *Mathematical methods for engineers and scientists 1: Complex analysis, determinants and matrices*. 2007.
- [35] M. G. D’Urso and S. Trotta, “Gravity Anomaly of Polyhedral Bodies Having a Polynomial Density Contrast,” *Surv. Geophys.*, vol. 38, no. 4, pp. 781–832, Apr. 2017, doi: 10.1007/s10712-017-9411-9.
- [36] M. T. Zuber *et al.*, “The shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker Laser Rangefinder,” *Science (80-. )*, vol. 289, no. 5487, 2000, doi: 10.1126/science.289.5487.2097.
- [37] D. Tsoulis, O. Jamet, J. Verdun, and N. Gonindard, “Recursive algorithms for the computation of the potential harmonic coefficients of a constant density polyhedron,” *J. Geod.*, vol. 83, no. 10, 2009, doi: 10.1007/s00190-009-0310-9.
- [38] D. Tsoulis, “Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals,” *Geophysics*, vol. 77, no. 2, 2012, doi: 10.1190/geo2010-0334.1.
- [39] D. Nagy, G. Papp, and J. Benedek, “Corrections to ‘The gravitational potential and its derivatives for the prism,’” *J. Geod.*, vol. 76, no. 8, 2002, doi: 10.1007/s00190-002-0264-7.
- [40] R. Klees, “Numerical calculation of weakly singular surface integrals,” *J. Geod.*, vol. 70, no. 11, 1996, doi: 10.1007/BF00867156.
- [41] R. Klees and R. Lehmann, “Calculation of strongly singular and hypersingular surface integrals,” *J. Geod.*, vol. 72, no. 9, 1998, doi: 10.1007/s001900050192.
- [42] L. J. Gray, J. M. Glaeser, and T. Kaplan, “Direct evaluation of hypersingular Galerkin surface integrals,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 25, no. 5, 2004, doi: 10.1137/S1064827502405999.
- [43] M. A. Khayat and D. R. Wilton, “Numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 10, 2005, doi: 10.1109/TAP.2005.856342.
- [44] D. B. Rao, “Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast,” *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, vol. 84, no. 1, 1986, doi: 10.1111/j.1365-246X.1986.tb04353.x.
- [45] J. García-Abdeslem, J. M. Romo, E. Gómez-Treviño, J. Ramírez-Hernández, F. J. Esparza-Hernández, and C. F. Flores-Luna, “A constrained 2D gravity model of the Sebastián Vizcaino Basin, Baja California Sur, Mexico,” *Geophys. Prospect.*, vol. 53, no. 6, 2005, doi: 10.1111/j.1365-2478.2005.00510.x.

## REFERENCES

- [46] I. V. R. Murthy and D. B. Rao, "Gravity anomalies of two-dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth," *GEOPHYSICS*, vol. 44, no. 9, 1979, doi: 10.1190/1.1441023.
- [47] B. Martín-Atienza and J. García-Abdeslem, "2-D gravity modeling with analytically defined geometry and quadratic polynomial density functions," *Geophysics*, vol. 64, no. 6, 1999, doi: 10.1190/1.1444677.
- [48] J. García-Abdeslem, "The gravitational attraction of a right rectangular prism with density varying with depth following a cubic polynomial," *Geophysics*, vol. 70, no. 6, 2005, doi: 10.1190/1.2122413.
- [49] D. Tsoulis, "Numerical investigations in the analytical and semi-analytical computation of gravimetric terrain effects," *Stud. Geophys. Geod.*, vol. 47, no. 3, 2003, doi: 10.1023/A:1024751315779.
- [50] M. G. D. Urso, I. Bianchi, and G. Costantino, "Determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno," *Atti 17a Conf. Naz. ASITA 2013*, 2013.
- [51] R. Karcol and R. Pašteka, "Density function evaluation from borehole gravity meter data – regularized spectral domain deconvolution approach," *Geophys. Prospect.*, vol. 65, no. 1, 2017, doi: 10.1111/1365-2478.12427.